

RECHERCHES
SUR LES RACINES IMAGINAIRES
DES EQUATIONS
PAR M. EULER.

§. 1.

Toute équation algébrique étant délivrée des fractions & des signes radicaux, se réduit toujours à cette forme générale:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots + N = 0$$

où les lettres A. B. C. D. .... N marquent des quantités constantes réelles, ou affirmatives ou negatives sans en exclure le zero. Les racines d'une telle équation sont les valeurs, qui étant mises pour x produisent une équation identique $0 = 0$. Or si $x + \alpha$ est un diviseur ou facteur de la formule proposée, l'autre facteur étant indiqué par X, de sorte que l'équation ait cette forme $(x + \alpha)\,X = 0$, il est clair que cela arrive si $x + \alpha = 0$, ou $x = -\alpha$. D'où l'on voit que les racines d'une équation se trouvent en cherchant les diviseurs ou facteurs de cette meme équation; & toutes les racines d'une équation se tireront de tous ses diviseurs simples de la forme $x + \alpha$.

§. 2. Donc pour trouver toutes les racines d'une équation proposée, on n'a qu'à chercher tous les facteurs simples de la quantité: $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N$; & si nous posons ces facteurs:

$$(x + \alpha)\ (x + \beta)\ (x + \gamma)\ (x + \delta)\ \&c.$$

il est d'abord clair que le nombre de ces facteurs doit étre egal à l'exposant n; & partant le nombre de toutes les racines qui seront:

$x =$

$x = -\alpha$; $x = -\beta$; $x = -\gamma$; $x = -\delta$; &c. ſera auſſi égal à ce même expoſant n, puisqu'un tel produit $(x+\alpha)$ $(x+\beta)$ $(x+\gamma)$ $(x+\delta)$ &c. ne ſauroit devenir égal à zero, à moins qu'un de ſes facteurs n'evanouïſſe. Toute équation donc de quelque degré qu'elle ſoit, aura toujours autant de racines, que l'expoſant de ſa plus haute puiſſance contient d'unités.

§. 3. Or il arrive fort ſouvent que toutes ces racines ne ſont pas des quantités réelles, & que quelques unes, ou peut-être toutes, ſont des quantités imaginaires. On nomme quantité imaginaire, celle qui n'eſt ni plus grande que zero, ni plus petite que zero, ni égale à zero; ce ſera donc quelque choſe d'impoſſible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a + b\sqrt{-1}$; puisqu'une telle quantité n'eſt ni poſitive, ni negative, ni zero. Ainſi cette équation $x^3 - 3xx + 6x - 4 = 0$ ayant ces trois racines $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{-3}$; & $x = 1 - \sqrt{-3}$, les deux dernieres ſont imaginaires, & il n'y aura qu'une racine réelle $x = 1$. D'où l'on voit, que ſi l'on ne vouloit comprendre ſous le nom de racines que celles qui ſont réelles, leur nombre ſeroit ſouvent beaucoup plus petit que le plus haut expoſant de l'équation. Et partant quand nous diſons que chaque équation a autant de racines, que l'expoſant de ſon degré indique, cela ſe doit entendre de toutes ſes racines tant réelles qu'imaginaires.

§. 4. Nous concevons donc, que de quelque degré que ſoit l'équation propoſée

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N = 0$$

elle puiſſe toujours être repréſentée par une telle forme;

$$(x+\alpha)\ (x+\beta)\ (x+\gamma)\ (x+\delta) \ldots (x+\nu) = 0$$

où le nombre de ces facteurs ſimples ſoit $= n$. Et puisque ces facteurs étant multipliés actuellement enſemble doivent produire l'équation propoſée, il eſt évident que les quantités A, B, C, D, ... N ſeront tellement déterminées par les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \nu$, qu'il ſera:

A =

A = à la ſomme de ces quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \nu$
B = à la ſomme de tous leurs produits de deux à deux
C = à la ſomme de leurs produits de trois à trois.
D = à la ſomme de leurs produits de quatre à quatre

⋮

& enfin

N = au produit de toutes enſemble, $\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu$.
Donc puisque le nombre des ces égalités eſt $= n$, les valeurs des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \nu$ en ſeront réciproquement déterminées.

§. 5. Quoiqu'il ſemble que la connoiſſance des racines imaginaires d'une équation ne puiſſe avoir aucune utilité, vu qu'elles ne fourniſſent point de ſolutions de quelque probleme que ce ſoit: neantmoins il eſt fort important dans toute l'analyſe de ſe rendre familier le calcul des quantités imaginaires. Car non ſeulement nous en acquerons une connoiſſance plus parfaite de la nature des équations; mais l'Analyſe des infinis en tire des ſecours très conſiderables. Car toutes les fois qu'il ſe preſente à intégrer une fraction, il en faut réſoudre le dénominateur dans tous ſes facteurs ſimples ſoit réels ou imaginaires, & de là on tire enfin l'intégrale, qui quoiqu'elle renferme des logarithmes imaginaires, on a des moyens de les réduire à des arcs de cercle réels. Outre cela il arrive ſouvent qu'une expreſſion, qui renferme des quantités imaginaires, ſoit neantmoins réelle, & dans ces cas le calcul des imaginaires eſt abſolument néceſſaire.

§. 6. Il eſt démontré dans l'Algebre, que lorsqu'une équation a des racines imaginaires, leur nombre eſt toujours pair, de ſorte que toute équation ou n'aura point du tout des racines imaginaires, ou elle en aura deux, ou quatre, ou ſix, ou huit &c. & jamais le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation ne ſauroit être impair. Mais on ſoutient de plus, que les racines imaginaires vont tellement de pair en pair, que tant la ſomme que le produit de deux devient réel. Ou ce qui revient au même, ſi $x + y\sqrt{-1}$ eſt un des facteurs imaginaires d'une équation, on ſoutient qu'il ſe trouvera toujours parmi les autres

un

un tel facteur $x - y\sqrt{-1}$ auſſi imaginaire, qui étant multiplié par celui-là $x + y\sqrt{-1}$ donne un produit réel. Or le produit de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$ étant $= xx + yy$, & la ſomme $= 2x$, il eſt clair que l'un & l'autre ſont des quantités réelles.

§. 7. Pour mieux éclaircir cela, ſoit $2m$ le nombre des facteurs ſimples imaginaires d'une équation quelconque, puisqu'on ſait que ce nombre eſt pair; & on ſoutient qu'on peut toujours ranger ces facteurs tellement deux à deux, que leurs produits deviennent réels. Ainſi ces facteurs imaginaires au nombre de $2m$ ſe réduiront à des facteurs réels au nombre de m, & ces derniers facteurs ne ſeront plus ſimples, mais de la forme $xx + px + q$: ils ſeront donc du ſecond degré. On dit donc que toute équation, ne pouvant etre réſoluë en des facteurs ſimples rééls, a toujours des facteurs réels du ſecond degré. Cependant perſonne, à ce que je ſache, n'a encore demontré aſſés rigoureuſement la verité de ce ſentiment: je tacherai donc d'en donner une démonſtration, qui ne ſoit aſſujettie à aucune exception.

§. 8. Or d'abord il eſt evident, que lorsqu'une équation n'a que deux facteurs ſimples imaginaires, leur produit eſt néceſſairement réel. Car le produit de ces deux facteurs multiplié par le produit de tous les autres, qu'on ſuppoſe réels, doit produire l'équation propoſée, c. à d. une quantité réelle, ce qui ſeroit impoſſible, ſi le produit des deux facteurs imaginaires n'étoit pas réel. On voit de même, que ſi une équation a quatre racines imaginaires, toutes les autres étant réelles, le produit de ces quatre facteurs imaginaires ſera auſſi réél. Et en général quel que ſoit le nombre des facteurs imaginaires d'une équation, leur produit doit etre néceſſairement une quantité réelle; donc ſi le nombre des facteurs imaginaires d'une équation eſt $= 2m$, le produit de tous ces facteurs multipliés enſemble ſera de cette forme: $x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + cx^{2m-3} +$ &c. où tous les coëfficiens a, b, c, &c. ſont des quantités réelles.

§. 9. Il faut donc commencer par prouver, qu'une équation du quatrième dégré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dont

toutes

toutes les racines ſont imaginaires, eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré $(xx+px+r)\ (xx+qx+s)=0$; car ſi toutes les racines ſont réelles, ou deux au moins, une telle réſolution n'a aucune difficulté. Mais ſi toutes les quatre ſont imaginaires la choſe eſt non ſeulement moins evidente, mais il y a même des cas, qui ne paroiſſent pas admettre une telle réſolution. Un très ſavant Géometre me propoſa autrefois cette équation:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

par laquelle il vouloit prouver, que la réſolution en deux facteurs réels n'étoit pas toujours poſſible. Et en effet il paroit d'abord fort difficile de combiner de ces quatre facteurs ſimples imaginaires tellement deux à deux enſemble, que leurs produits deviennent réels.

§. 10. Le doute tiré de cette équation étant trop important, pour que je le puiſſe paſſer en donnant une démonſtration générale de la propriété, dont il s'agit, je m'en vai déveloper plus ſoigneuſement ce cas, avant que d'entreprendre cette demonſtration. Et d'abord puisque les coëfficiens de cette équation, qui ſont 1, 2, 4, 2, 1 tiennent le même ordre, en commençant par le devant ou par l'arriere, il eſt certain que l'équation propoſée eſt réſoluble en deux facteurs de cette forme:

$$(xx+px+1)\quad(xx+qx+1)$$

dont le produit $x^4+(p+q)\,x^3+(pq+2)\,xx+(p+q)\,x+1$ étant comparé avec la forme propoſée $x^4+2x^3+4x^2+2x+1$ fournit ces deux égalités $p+q=2$ & $pq+2=4$ ou $pq=2$. Donc il y aura $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4-4\cdot 2=-4$, & partant $p-q=\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$: d'où nous tirons ces valeurs:

$$p=1+\sqrt{-1}\qquad\&\qquad q=1-\sqrt{-1}$$

de ſorte que l'équation propoſée:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

eſt

eſt maintenant réduite à ces deux facteurs du ſecond degré:

$$\left(xx+(1+\sqrt{-1})x+1\right)\ \left(xx+(1-\sqrt{-1})x+1\right)=0$$

qui ſont à la verité imaginaires.

§. 11. Mais pour décider s'il eſt poſſible ou non, de réduire cette équation à deux facteurs réels du ſecond degré, il faut chercher ſes quatre facteurs ſimples, pour voir ſi l'on en peut combiner autrement deux à deux, afin qu'on parvienne à des produits réels. Or le premier facteur double $xx+(1+\sqrt{-1})x+1$ donne ces deux facteurs ſimples:

$$x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=0$$
$$x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=0$$

& l'autre facteur double $xx+(1-\sqrt{-1})x+1$ donne ces deux facteurs ſimples:

$$x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=0$$
$$x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-1})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=0.$$

Il s'agit donc de voir, ſi le premier facteur ſimple étant multiplié par le troiſieme ou le quatrieme produit un facteur double réel ou non? puiſque nous voyons déjà, que le produit du premier par le ſecond eſt imaginaire.

§. 12. Cependant il n'eſt pas ſi aiſé de reconnoitre ſi les produits, qu'on trouve par ces multiplications du premier facteur par le 3me ou le 4me ſont réelles ou imaginaires, & la difficulté nait des termes imaginaires $\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}$ & $\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}$, donc on ne peut pas comparer l'imaginaire avec celui des autres nombres $1+\sqrt{-1}$ & $1-\sqrt{-1}$. Or je remarque que la formule $\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}$ peut ſe réduire à une telle forme $u+v\sqrt{-1}$, & alors l'autre formule $\sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}$ deviendra égale à $u-v\sqrt{-1}$. Car faiſant ces égalités:

$$\sqrt{(2\sqrt{-1}-4)}=u+v\sqrt{-1}\ \ \&\ \ \sqrt{(-2\sqrt{-1}-4)}=u-v\sqrt{-1}$$

& pre-

& prenant les quarrés, on obtiendra celles-cy:

$2\sqrt{-1}-4=uu-vv+2uv\sqrt{-1}$ & $-2\sqrt{-1}-4=uu-vv-2uv\sqrt{-1}$

d'où l'on tirera: $-4=uu-vv$ & $2\sqrt{-1}=2uv\sqrt{-1}$, ou bien $vv-uu=4$ & $uv=1$. Et ensuite on formera:

$(vv+uu)^2=(vv-uu)^2+4uuvv=16+4=20$; desorte que $vv+uu=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. De là on trouvera enfin

$vv=\sqrt{5}+2$, $uu=\sqrt{5}-2$ & par conséquent

$$v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)} \quad \& \quad u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}.$$

§. 13. Ces deux valeurs de v & u étant réelles, substituons les dans les expressions des quatre facteurs simples trouvés cy-dessus; & ces facteurs deviendront:

I. $x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})+\frac{1}{2}(u+v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1+u)+\frac{1}{2}(1+v)\sqrt{-1}$

II. $x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})-\frac{1}{2}(u+v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1-u)+\frac{1}{2}(1-v)\sqrt{-1}$

III. $x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})+\frac{1}{2}(u-v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1+u)-\frac{1}{2}(1+v)\sqrt{-1}$

IV. $x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{-1})-\frac{1}{2}(u-v\sqrt{-1})=x+\frac{1}{2}(1-u)-\frac{1}{2}(1-v)\sqrt{-1}$

Maintenant il est clair que le produit du premier par le troisieme devient effectivement réél, de même que celui du second par le quatrieme. Car on aura

le produit du I par le III $=(x+\frac{1}{2}(1+u))^2+\frac{1}{4}(1+v)^2$

le produit du II par le IV $=(x+\frac{1}{2}(1-u))^2+\frac{1}{4}(1-v)^2$

Voilà donc l'équation proposée:

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$$

réduite à ces deux facteurs réels du second degré

$$xx+(1+u)x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{4}(vv+uu)=0$$
$$xx+(1-u)x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{4}(vv+uu)=0$$

où est $v=\sqrt{(\sqrt{5}+2)}$; $u=\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$ & $vv+uu=2\sqrt{5}$.

§. 14.

§. 14. Cet exemple nous conduit à un probleme plus général, qui ne manquera pas de nous éclaircir déjà considérablement sur le sujet en question. *Ce probleme regarde cette équation du quatrieme degré, plus générale :*

$$x^4 + ax^3 + (b+2)xx + ax + 1 = 0$$

qu'il faut résoudre en deux facteurs doubles ou du second degré, qui soient réels.

Posons dabord ces deux facteurs de la forme suivante

$$(xx + px + 1)\ (xx + qx + 1) = 0$$

& on voit d'abord qu'il faut qu'il soit:

$p + q = a$ & $pq = b$ d'où l'on tirera

$$p = \frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2} \ \& \ q = \frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$$

Donc toutes les fois que $aa > 4b$ le probleme est resolu, vu que les deux facteurs supposés deviennent réels.

§. 15. Mais lorsque $aa < 4b$, ces deux facteurs seront imaginaires, & ne satisferont pas à la question. Dans ces cas il faut considerer les facteurs simples qui seront:

I. $x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{(pp-4)} = 0$
II. $x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{(pp-4)} = 0$
III. $x + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{(qq-4)} = 0$
IV. $x + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{(qq-4)} = 0$

Posons $4b = aa + cc$, puisque $aa < 4b$ & on aura

$$p = \frac{a + c\sqrt{-1}}{2} \qquad \& \ q = \frac{a - c\sqrt{-1}}{2} \ \text{donc:}$$

$$\sqrt{(pp-4)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - cc - 16 + 2ac\sqrt{-1})} \ \&$$
$$\sqrt{(qq-4)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - cc - 16 - 2ac\sqrt{-1})}$$

Ces deux formules étant imaginaires, soit:

$$\sqrt{(aa-cc-16+2ac\sqrt{-1})} = u+v\sqrt{-1} \;\&$$
$$\sqrt{(aa-cc-16-2ac\sqrt{-1})} = u-v\sqrt{-1}$$

& de là nous tirerons:

$$uu-vv = aa-cc-16 \quad \& \; uv = ac$$

§. 16. Ces égalités nous fournissant celle-ci;

$$(uu+vv)^2 = (aa-cc-16)^2+4aacc = (aa+cc)^2-32(aa-cc)+256$$

donc $vv+uu = \sqrt{\left((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256\right)}$

or cette quantité irrationelle renfermant aprés le signe radical la somme de deux quarrés, sera toujours réelle, & meme sa valeur sera plus grande que $aa-cc-16 = uu-vv$ ou que $vv-uu = 16+cc-aa$. Nous aurons donc les valeurs suivantes réelles pour v & u, savoir:

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{\left((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256\right)}+16+cc-aa}{2}}$$

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{\left((aa+cc)^2-32(aa-cc)+256\right)}-16-cc+aa}{2}}$$

& remettant pour cc sa valeur $4b-aa$, on aura

$$v = \sqrt{\left(\sqrt{(4bb-16(aa-2b)+64)}+8+2b-aa\right)}$$
$$u = \sqrt{\left(\sqrt{(4bb-16(aa-2b)+64)}-8-2b+aa\right)}$$

ou bien:

$$v = \sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+8+2b-aa\right)}$$
$$u = \sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8-2b+aa\right)}$$

§. 17. Ayant trouvé ces valeurs réelles pour v & u dans le cas où $4b > aa$ ou $4b = aa+cc$, nos quatre facteurs simples imaginaires seront.

I. $x+$

$$\text{I. } x+\tfrac{1}{4}(a+c\sqrt{-1})+\tfrac{1}{4}(u+v)\sqrt{-1}=x+\tfrac{1}{4}(a+u)+\tfrac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1}$$
$$\text{II. } x+\tfrac{1}{4}(a-c\sqrt{-1})-\tfrac{1}{4}(u+v)\sqrt{-1}=x+\tfrac{1}{4}(a-u)+\tfrac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1}$$
$$\text{III. } x+\tfrac{1}{4}(a+c\sqrt{-1})+\tfrac{1}{4}(u-v)\sqrt{-1}=x+\tfrac{1}{4}(a+u)-\tfrac{1}{4}(c+v)\sqrt{-1}$$
$$\text{IV. } x+\tfrac{1}{4}(a-c\sqrt{-1})-\tfrac{1}{4}(u-v)\sqrt{-1}=x+\tfrac{1}{4}(a-u)-\tfrac{1}{4}(c-v)\sqrt{-1}$$

d'où il eſt clair que les produits du I. facteur par le III & du II par le IV ſont réels, devenant :

$$xx+\tfrac{1}{2}(a+u)x+\tfrac{1}{16}(aa+cc)+\tfrac{1}{16}(uu+vv)+\tfrac{1}{8}(au+cv)$$
$$xx+\tfrac{1}{2}(a-u)x+\tfrac{1}{16}(aa+cc)+\tfrac{1}{16}(uu+vv)-\tfrac{1}{8}(au+cv)$$

où il faut remarquer que $aa+cc=4b$; $vv+uu=4\sqrt{((b+4)^2-4aa)}$

§. 18. Pour exprimer plus commodément la valeur de $au+cv$ cherchons en celle du quarré, $aauu+ccvv+2acuv$.

$$aauu=2aa\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8aa-2aab+a^4$$
$$ccvv=\left.\begin{matrix}+8b\\-2aa\end{matrix}\right\}\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+32b+8bb-4aab-8aa-2aab+a^4$$

$2acuv=2aacc=8aab-2a^4$; donc nous aurons

$$(au+cv)^2=8b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+32b-16aa+8bb$$

& la racine quarrée ſe trouvera :

$$au+cv=2\sqrt{\left(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}\right)}$$

& partant les deux facteurs réels cherchés ſeront dans le cas $4b>aa$:

$$xx+\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8-2b+aa\right)}$$
$$+\tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{4}\sqrt{((b+4)^2-4aa)}+\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}\right)}$$
$$xx+\tfrac{1}{2}ax-\tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-8-2b+aa\right)}$$
$$+\tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{4}\sqrt{((b+4)^2-4aa)}-\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2bb+8b-4aa+2b\sqrt{((b+4)^2-4aa)}\right)}$$

§. 19. Par ce cas particulier on comprendra plus aiſément ce que je veux prouver en général, c'eſt que toute équation, de quelque degré

degré qu'elle ſoit, eſt toujours réſoluble en des facteurs réels ou ſimples ou doubles. Ou puisque deux facteurs ſimples joints enſemble produiſent un facteur double, il faut démontrer que toute équation d'un degré pair comme

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \&c. \ldots + N = 0$$

eſt réſoluble en m facteurs réels doubles de la forme $xx + px + r$, & qu'une équation d'un degré impair comme

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots + N = 0$$

a premièrement un facteur ſimple réel, & enſuite m facteurs doubles auſſi tous réels. Pour cet effet je déveloperai les propoſitions ſuivantes, qui conduiront à la démonſtration de ce que je viens d'avancer.

Theoreme. I.

§. 20. *Toute équation d'un degré impair dont la forme générale eſt:*

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = 0$$

a toujours une racine reelle au moins, & ſi elle en a pluſieurs, leur nombre ſera impair.

DEMONSTRATION.

Qu'on poſe $x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots + N = y$ & qu'on conſidére la ligne courbe exprimée par cette équation: & il eſt évident qu'a chaque abſciſſe x ne répond qu'une ſeule appliquée y qui ſera toujours réelle; & que là où l'appliquée y evanouit, la valeur de l'abſciſſe x ſera une racine de l'équation propoſée. Donc cette équation aura autant de racines réelles qu'il y a d'endroits, où l'appliquée y évanouit, ce qui arrive là, où la courbe traverſe l'axe des abſciſſes; deſorte que le nombre des racines réelles ſera egal au nombre des interſections de la courbe avec l'axe, ſur lequel on prend les abſciſſes. Pour juger donc du nombre de ces interſections, poſons premierement l'abſciſſe x poſitive & infiniment grande ou $x = \infty$, & il eſt

eſt clair, qu'il deviendra alors $y = \infty^{2m+1} = \infty$, d'où il s'enſuit que la branche de la courbe, qui répond aux abſciſſes poſitives infinies, ſe trouve au deſſus de l'axe, puiſque ſes appliquées y ſont poſitives. Or poſant les abſciſſes negatives & auſſi infinies ou $x = -\infty$, il ſera $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$; donc les appliquées ſeront ici negatives, & la branche de la courbe ſe trouvera au deſſous de l'axe. Cette branche étant continue avec l'autre ſituée au deſſus de l'axe, il faut abſolument que la courbe traverſe quelque part l'axe, & ſi elle le traverſe en pluſieurs points, le nombre de ces points doit être impair. D'où il s'enſuit que l'équation propoſée aura neceſſairement une racine réelle au moins, & ſi elle en a pluſieurs, que leur nombre ſera toujours impair, C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

§. 21. Donc puiſque le nombre de toutes les racines de l'équation propoſée eſt $= 2m+1$ ou impair, & que le nombre des racines réelles eſt auſſi impair, il s'enſuit que le nombre des racines imaginaires, s'il y en a, ſera toujours pair.

Theoreme. II.

§. 22. *Toute équation d'un degré pair, dont la forme générale eſt:*

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots + N = 0$$

ou n'aura aucune racine réelle, ou ſi elle a des racines réelles, leur nombre ſera toujours pair.

DEMONSTRATION.

Conſidérons encore la courbe exprimée par cette équation

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots + N = y$$

qui

qui ne consistera que d'un seul trait continu, puisque à chaque abscisse x il répond toujours une seule appliquée. Posons $x = +\infty$ & il sera aussi $y = +\infty$; donc la branche de la courbe, qui répond aux abscisses positives infinies, sera située au dessus de l'axe. Or posant $x = -\infty$, on aura pareillement $y = (-\infty)^{2m} = +\infty$, de sorte que la branche de la courbe, qui repond aux abscisses negatives infinies, se trouvera aussi au dessus de l'axe. Donc il sera possible que la courbe ne traverse nulle part l'axe des abscisses; & si elle passe quelque part par l'axe, pour descendre dans la région au dessous, il faut qu'elle y repasse pour retourner dans celle de dessus. Par conséquent si la courbe traverse l'axe, il faut que le nombre de toutes les intersections soit pair. Donc puisque chaque intersection donne une racine réelle de l'équation proposée, il s'ensuit ou qu'elle n'aura point du tout de racines réelles, ou si elle en a, que leur nombre sera toujours pair. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 23. Puisque le nombre de toutes les racines, tant réelles qu' imaginaires, de l'équation proposée est $= 2m$, & partant pair, & que le nombre des racines réelles, si elle en a, est aussi pair, il s'ensuit que le nombre des racines imaginaires, si elle en a, est aussi pair.

SCHOLIE.

§. 24. Ces deux Theoremes avec leurs démonstrations sont déja si connus, que j'aurois pu m'y rapporter sans les détailler. Mais comme ils renferment le fondement de toute la Theorie, dont il s'agit ici: que le nombre de toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque est toujour pair: j'ai cru en devoir tirer le commencement; & cela d'autant plus que le theoreme suivant, qui n'est pas si généralement connu, demande une démonstration semblable.

Theoreme III.

§. 25. *Toute équation d'un degré pair quelconque, où le dernier terme, ou l'absolu, a une valeur negative, comme*

x^{2m}

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots\ldots - OO = 0$$

a toujours deux racines réelles au moins, l'une positive & l'autre negative.

DEMONSTRATION.

Posant $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots\ldots - OO = y$ pour considérer la courbe exprimée par cette équation, nous venons de voir, que cette courbe s'etend des deux cotés à l'infini au dessus de l'axe. Or posant $x = 0$, nous aurons $y = -OO$, & partant le point de la courbe qui répond à $x = 0$, sera au dessous de l'axe: il faut donc que la courbe passe de ce point de l'un & l'autre coté par l'axe pour monter au dessus. Donc puisque chaque intersection donne une racine réelle de l'équation proposée, & que de ces deux intersections l'une doit répondre à une abscisse x affirmative, l'autre à une negative, il est certain que l'équation proposée aura au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre negative. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§.26. Cette démonstration nous fait aussi comprendre, que quand une équation semblable à la proposée aura plusieurs racines réelles positives, leur nombre sera impair, de même le nombre de toutes les racines réelles negatives sera aussi impair.

Theoreme IV.

§. 27. *Toute équation du quatrième degré, comme*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

se peut toujours décomposer en deux facteurs réels du second degré.

DEMONSTRATION.

On sait que posant $x = y - \frac{1}{4}A$, cette équation se change dans une autre du même degré, où le second terme manque; & comme cette transformation se peut toujours faire, supposons que dans l'équation

 propo-

proposée le second terme manque déjà, & que nous ayons cette équation

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

à résoudre en deux facteurs réels du second degré; & il est d'abord clair, que ces deux facteurs seront de cette forme

$$(xx + ux + \alpha) \quad (xx - ux + \beta) = 0$$

dont comparant le produit avec l'équation proposée, nous aurons :

$$B = \alpha + \beta - uu; \ C = (\beta - \alpha) u; \quad D = \alpha\beta$$

d'où nous tirerons :

$$\alpha + \beta = B + uu \ ; \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u}$$

& partant $2\beta = uu + B + \frac{C}{u}$, & $2\alpha = uu + B - \frac{C}{u}$

ayant donc $4\alpha\beta = 4D$, nous obtiendrons cette équation

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D \quad \text{ou bien}$$

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0$$

d'où il faut chercher la valeur de u. Or puisque le terme absolu $-CC$ est essentiellement negatif, nous venons de démontrer, que cette équation a au moins deux racines réelles ; prenant donc l'une ou l'autre pour u, les valeurs α & β seront également réelles, & par conséquent les deux facteurs supposés du second degré $xx + ux + \alpha$ & $xx - ux + \beta$ seront réels. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 28. Toute expression donc du quatriéme degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

quoique tous ses quatre facteurs simples soient imaginaires, se peut toujours décomposer en deux facteurs réels du second degré : ou bien chacun

chacun des quatre facteurs ſimples a parmi les autres ſon compagnon, par lequel étant multiplié il produit un produit réel.

COROLL. II.

§. 29. Et, ſi une expreſſion d'un degré quelconque n'a que quatre facteurs ſimples imaginaires, puiſque leur produit eſt réel, & compris dans cette forme $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, il eſt auſſi certain, que ce produit eſt réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, dont chacun renferme deux facteurs ſimples imaginaires.

COROLL. III.

§. 30. De là il eſt auſſi évident, qu'une équation quelconque du cinquiéme degré eſt toujours réſoluble en trois facteurs réels, dont un eſt ſimple & deux doubles ou du ſecond degré. Car cette équation ayant une racine réelle, aura un facteur ſimple réel, & l'autre facteur étant du quatriéme degré, ſe décompoſe en deux facteurs doubles réels.

COROLL. IV.

§. 31. La réſolution des équations en facteurs réels, ou ſimples ou doubles, eſt donc prouvée pour les équations du cinquiéme degré & pour tous les degrés inferieurs. Mais ce theoreme n'eſt pas ſuffiſant à prouver cette réſolution pour aucun degré ſuperieur, à moins que le nombre des racines imaginaires ne ſoit plus petit que 6. Car alors ce nombre ſera ou 4, ou 2, ou o, & dans tous ces cas la poſſibilité de cette réſolution eſt evidente.

SCHOLIE I.

§. 32. J'ai déjà prouvé cy deſſus que cette équation du quatriéme degré, $x^4 + ax^3 + (b+2)x^2 + ax + 1 = 0$, qui n'eſt qu'un cas particulier de la générale de ce degré, que je viens de conſidérer ici, eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré. Or cette réſolution, qui a été aſſez embarraſſante dans le cas $4b > aa$, ſe déduit immediatement de la methode employée dans ce theoreme, ſans avoir égard à la forme des racines imaginaires. Cet uſage me paroit aſſez important, pour que je faſſe l'application de la

résolution générale à ce cas. Or pour éviter les fractions posons $a = 4c$ & $b > 4cc$, de sorte que l'équation à résoudre soit:

$$x^4 + 4cx^3 + (b+2)xx + 4cx + 1 = 0.$$

Maintenant pour ôter le second terme soit $x = y - c$ & notre équation prendra cette forme:

$$y^4 + (2 + b - 6cc)y^2 + (8c^3 - 2bc)y + 1 - 2cc + bcc - 3c^4 = 0$$

dont supposant les facteurs réels du second degré

$$(yy + uy + \alpha)\ (yy - uy + \beta) = 0$$

à cause de

$$B = 2 + b - 6cc;\ C = 8c^3 - 2bc;\ \&\ D = 1 - 2cc + bcc - 3c^4$$

pour trouver u nous aurons cette équation à résoudre:

$$u^6 + (4 + 2b - 12cc)u^4 + (bb + 4b - 16bcc - 16cc + 48c^4)u^2 - 4cc(4cc - b)^2 = 0$$

qui étant divisée par $uu + b - 4cc$ donne

$$u^4 + (4 + b - 8cc)u^2 + 16c^4 - 4bcc = 0$$

Or le premier facteur $uu + b - 4cc$ étant posé $= 0$, ne donne que des valeurs imaginaires pour u, à cause de $b > 4cc$: donc il faut chercher quelque valeur réelle de l'autre équation, d'où l'on tire

$$uu = -2 - \tfrac{1}{2}b + 4cc \pm \sqrt{((2 + \tfrac{1}{2}b)^2 - 16cc)}$$

& la valeur réelle de u sera:

$$u = \sqrt{\left(\sqrt{((2 + \tfrac{1}{2}b)^2 - 16cc)} - 2 - \tfrac{1}{2}b + 4cc\right)}$$

ou bien remettant aa pour $16cc$

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{((b+4)^2 - 4aa)} - 8 - 2b + aa\right)}$$

d'où l'on trouve les mêmes facteurs, qui ont été assignés cy-dessus.

SCHOLIE II.

§. 33. La force de la démonstration de ce Theoreme revient à ce que l'inconnue u se detérmine par une équation du 6me degré, & que le dernier terme de cette équation est essentiellement negatif. L'une

L'une & l'autre de ces deux circonstances se peut découvrir par le seul raisonnement, sans qu'on ait besoin de chercher l'équation même, qui renferme l'inconnue u. Donc puisque dans la suite, où je passerai à des équations de plus hauts degrés, il seroit trop difficile & même impossible de trouver l'équation, par laquelle l'inconnue u est déterminée; il sera important de découvrir les deux circonstances mentionnées par le seul raisonnement, pour l'équation proposée du quatriéme degré, afin de frayer le chemin pour mettre en usage ce même raisonnement, lorsque l'équation proposée sera d'un plus haut degré.

Soit donc l'équation proposée dégagée déja du second terme

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

& posant les quatre racines de cette équations

$$x = \mathfrak{a}; \quad x = \mathfrak{b}; \quad x = \mathfrak{c}; \quad x = \mathfrak{d}$$

il est d'abord clair que la somme de ces quatre racines

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ sera égale à zero.

Ensuite posant en général un des facteurs doubles de cette équation $xx - ux + \beta$ ou $xx - ux + \beta = 0$, il est certain que u sera la somme de deux racines quelconques des quatre supposées $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Donc cette lettre u regardée comme notre inconnüe peut avoir autant de valeurs differentes, qu'il y a de diverses combinaisons de deux lettres prises de ces quatre $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$. Or ce nombre de combinaisons étant comme on sait $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, la lettre u est susceptible de 6 valeurs differentes, & non de plusieurs. Donc la lettre u sera déterminée par une équation du 6me degré, qui aura les six racines suivantes:

$$\text{I. } u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}; \quad \text{II. } u = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}; \quad \text{III. } u = \mathfrak{a} + \mathfrak{d}$$
$$\text{IV. } u = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}; \quad \text{V. } u = \mathfrak{b} + \mathfrak{d}; \quad \text{VI. } u = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

Donc puisque $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$, si nous posons les trois premiéres de ces six racines:

$$\text{I. } u = p; \qquad \text{II. } u = q; \qquad \text{III. } u = r$$

les

les trois derniéres feront :

$$\text{IV. } u = -p; \quad \text{V. } u = -q; \quad \text{VI. } u = -r$$

de forte que le negatif de chaque valeur de u fera auſſi une valeur de u.

Sachant maintenant ces ſix racines, l'équation qui les fournira toutes ſera :

$$(u-p)\ (u-q)\ (u-r)\ (u+p)\ (u+q)\ (u+r) = 0$$

ou combinant par toutes les deux enſemble, dont l'une eſt la negative de l'autre, nous aurons :

$$(uu-pp)\quad (uu-qq)\quad (uu-rr) = 0.$$

ce qui donnera une équation du ſixieme degré, ou toutes les puiſſances impaires de u manquent, tout comme nous l'avons trouvée dans la démonſtration du Theoreme.

Mais je remarque de plus, que le dernier terme conſtant de cette équation ſera $= -pp. -qq. -rr. = -ppqqrr$, lequel étant donc un quarré avec le ſigne $-$, ſera eſſentiellement negatif. D'où il s'enſuit que cette équation aura neceſſairement au moins deux racines réelles, dont l'une ou l'autre priſe pour u donnera un facteur réel double de l'équation propoſée. Voila donc une autre demonſtration du Theoreme propoſé, à laquelle ſeront ſemblables celles des theoremes ſuivans.

Or on m'objectera ſans doute, que j'ai ſuppoſé ici, que la quantité pqr étoit une quantité réelle, & que ſon quarré $ppqqrr$ étoit affirmatif ; ce qui étoit encore douteux, vu que les racines $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, étant imaginaires, il pourroit bien arriver, que le quarré de la quantité pqr, qui en eſt compoſée, fût negatif. Or je reponds à cela, que ce cas ne ſauroit jamais avoir lieu ; car quelque imaginaires que ſoient les racines $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, on ſait pourtant qu'il doit y avoir

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$$

$$\mathfrak{ab} + \mathfrak{ac} + \mathfrak{ad} + \mathfrak{bc} + \mathfrak{bd} + \mathfrak{cd} = B$$

$$\mathfrak{abc} + \mathfrak{abd} + \mathfrak{acd} + \mathfrak{bcd} = C$$

$$\mathfrak{abcd} = D$$

ces

ces quantités B. C. D. étant réelles. Mais puisque $p = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$; $q = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$; $r = \mathfrak{a} + \mathfrak{d}$, leur produit

$$pqr = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\ (\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\ (\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$$

eſt déterminable, comme on ſait, par les quantités B, C, D, & ſera par conſéquent réel: tout comme nous avons vu, qu'il eſt effectivement $pqr = C$, & $pp\,qq\,rr = CC$. On reconnoitra aiſément de méme, que dans les plus hautes équations cette même circonſtance doit avoir lieu, & qu'on ne ſauroit me faire des objections de ce coté contre les démonſtrations ſuivantes.

Theoreme V.

§. 34. *Toute équation du 8me degré eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du quatrième degré.*

DEMONSTATION.

Ayant fait évanouir le ſecond terme, l'équation propoſée du 8me degré aura cette forme:

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0$$

dont les deux facteurs du quatriéme degré en général ſeront

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0$$

Si nous égalons le produit de ces deux facteurs à l'équation propoſée, nous obtiendrons 7 egalités, c'eſt à dire préciſément autant qu'il y a de coëfficiens inconnus u, α, β, γ, δ, ε, ζ. De ces égalites on eliminera ſucceſſivement les lettres α, β, γ, δ, ε, ζ, ce qui ſe pourra faire, comme on ſait, ſans qu'on ait beſoin d'aucune extraction de racine; de ſorte que les valeurs de ces lettres ſeront toutes exprimées réellement par les quantités connuës B, C, D, E, F, G, H, & l'inconnuë u: & enfin on parviendra à une équation, qui ne renfermera plus que l'inconnuë u avec les quantités connuës, de laquelle il faut chercher la valeur de u; & cette valeur étant trouvée réelle, les valeurs des lettres eliminées $\alpha, \beta, \gamma,$

α, β, γ, &c. feront auffi réelles, & partant les deux facteurs fuppofés du quatriéme degré également réels.

Il s'agit donc de trouver l'équation, qui nous détermine la valeur de u. Or en général u exprimera la fomme de quatre racines quelconques de l'équation propofée, dont le nombre de toutes les racines étant $= 8$, la lettre u aura autant de valeurs differentes, qu'il y a de diverfes combinaifons de 4 racines prifes des huit de l'équation; ainfi le nombre de toutes les valeurs de u fera $= \frac{8.7.6.5.}{1.2.3.4.} = 70$. & partant l'inconnuë u fera déterminée par une équation du 70me degré. De plus fi nous fuppofons que p foit une des valeurs de u, p fera la fomme de quelques quatre racines de l'équation propofée, & la fomme des autres quatre fera $= -p$, puisque la fomme de toutes les huit racines eft $= 0$. Ainfi fi $u - p$ eft un facteur de l'équation du 70me degré, $u + p$ en fera un auffi, & partant joignant ces deux facteurs enfemble, $uu - pp$ fera un facteur double ou du fecond degré de ladite équation du 70me degré. Par conféquent cette équation aura 35 facteurs de la forme $uu - pp$, ou elle fera un tel produit

$$(uu - pp)\ (uu - qq)\ (uu - rr)\ (uu - ss)\ \&c.$$

le nombre de ces facteurs étant $= 35$. Donc le dernier terme ou le terme abfolu de cette équation fera le produit de 35 quarrés negatifs, & par conféquent auffi un quarré negatif comme $-pp\,qq\,rr\,ss$ &c. à caufe du nombre 35 impair. Or la racine de ce quarré, $pqrs$ &c. eft une quantité réelle déterminable par les coëfficiens B, C, D, E, &c de l'équation propofée, & partant fon quarré $pp\,qq\,rr\,ss$ &c. une quantité pofitive. Donc le coëfficient inconnu u étant déterminé par une équation du 70me degré, dont le dernier terme eft effentiellement negatif, cette équation aura au moins deux valeurs réelles, dont l'une étant pofée pour u fournira un facteur réel du 4me degré de l'équation propofée, qui fera par conféquent réfoluble en deux facteurs réels du 4me degré. C.Q.F.D.

COROLL.

COROLL. I.

§. 35. Or chaque facteur du 4me degré étant résoluble en deux facteurs réels du second degré, il s'ensuit que toute équation du huitiéme degré est toujours résoluble en quatre facteurs réels du second degré de la forme $xx + px + q$.

COROLL. II.

§. 36. On voit aussi que toute équation du neuviéme degré est résoluble en un facteur simple réel & quatre facteurs doubles ou du second degré également réels.

COROLL. III.

§. 37. Cette proposition nous fait aussi voir, que la même résolution en facteurs réels ou simples ou doubles, doit avoir lieu dans toutes les équations du 6me ou 7me degré. Car on n'a qu'à multiplier une telle équation, ou par xx, ou par x, pour la réduire au huitiéme degré.

SCHOLIE. I.

§. 38. Ayant multiplié une équation du sixiéme degré par xx, pour avoir une du 8me degré, les deux facteurs du 4me degré de celle-cy renfermeront ce multiplicateur xx, qu'il en faut par conséquent retrancher, pour avoir les facteurs de l'équation proposée du 6me degré. Or il arrivera, ou que l'un des deux facteurs du 4me degré contiendra xx, ou que chacun en contienne x: dans le premier cas on aura aprés la division par xx un facteur réel du second degré & un du 4me; qui étant séparé en deux du second, on aura les trois facteurs doubles de l'équation proposée. Or dans l'autre cas divisant chaque facteur par x, on obtiendra deux facteurs réels du 3me degré, dont chacun renferme un facteur simple réel: de sorte que dans l'un & l'autre cas l'équation du 6me degré se résout en facteurs réels, ou simples, ou doubles. On verra de même, que les équations du 7me degré sont également résolubles en tels facteurs, puisqu'on sait que ces équations ont toujours un facteur simple réel, par lequel étant divisées elles seront réduites à des équations du 6me degré.

SCHOLIE. 2.

§. 39. S'il paroit encore douteux, ſi après avoir trouvé une valeur réelle de u, les autres coëfficiens $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. ſeront auſſi déterminés par des expreſſions réelles ; vu qu'il pourroit arriver que quelques uns renfermeroient des quantités irrationelles, qui pourroient devenir imaginaires. Mais pour lever ce doute, on n'a qu'à regarder u comme une quantité deja connuë, deſorte que le nombre des égalites, auxquelles il faut ſatisfaire, ſurpaſſe d'une unité le nombre des inconnuës $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. qui ſont à déterminer. Ainſi on éliminera l'une après l'autre de ces quantités, tant que cela ſe pourra faire ſans extraire des racines ; cela étant fait, il reſtera un certain nombre d'égalités, & le nombre des inconnuës ſera d'une unité moindre. Suppoſons qu'il reſte encore à déterminer quelques inconnuës, dont chacune monte dans les équations a pluſieurs dimenſions. Dans ce cas on peut toujours combiner deux égalités tellement enſemble, qu'il en réſulte une, où l'inconnuë à déterminer n'aura pas plus d'une dimenſion, & de là on tirera ſa valeur par une expreſſion rationelle. Suivant cette methode on parviendra enfin à deux égalités, qui contiennent la derniere quantité inconnuë, & à quelque dignité qu'elle y monte, on a dans l'algébre des moyens d'en former par la voïe de combinaiſon d'autres équations, où les puiſſances de l'inconnuë ſeront ſucceſſivement abbaiſſées, & enfin on parviendra à une équation, dans laquelle ne ſe trouvera que la premiere puiſſance de l'inconnuë, qui en ſera par conſéquent determinée par une expreſſion rationelle ; laquelle étant ſubſtituée dans les valeurs des autres coëfficiens déja trouvées, fournira auſſi pour ceux-cy des expreſſions rationelles. De ſorte que lorsqu'on aura trouvé pour u une valeur réelle, les valeurs de tous les autres coëfficiens le deviendront auſſi néceſſairement.

Theoreme VI.

§. 40. *Toute équation du 16me degré eſt toujours réſoluble en deux facteurs réels du 8me degré.*

DEMON-

DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouïr le fecond terme de l'équation, elle aura cette forme $x^{16} + Bx^{14} + Cx^{13} + Dx^{12} + \&c. \ldots = 0$. & le nombre des coëfficients B, C, D, &c. fera $= 15$. Suppofant donc fes deux facteurs du 8me degré.

$$x^8 - ux^7 + \alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x + \eta = 0$$
$$x^8 + ux^7 + \theta x^6 + \iota x^5 + \kappa x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi = 0$$

fi l'on égale le produit de ces deux facteurs à l'équation propofée, on obtiendra 15 egalités, defquelles il faut chercher les valeurs des coëfficients $u, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. dont le nombre eft auffi $= 15$, de forte que c'eft un probleme déterminé. Donc fi nous pour le commencement regardons le coëfficient u comme connu, nous aurons une egalité de plus, que des inconnües $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. & partant on en pourra tirer leurs valeurs déterminées par u & B, C, D, E, &c. fans avoir befoin d'aucune extraction de racine: ces valeurs feront donc rationnelles & par conféquent auffi réelles pourvu qu'on ait une valeur réelle pour u. Tout revient donc à démontrer, qu'il eft toujours poffible de trouver une valeur réelle pour le coëfficient u. Or ayant eliminé fucceffivement toutes les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. on parviendra enfin à une équation compofée des coëfficiens connus B, C, D, E, &c. & de l'inconnuë u, qui y montera à un certain degré de dimenfions, dont l'expofant fe conclura par ce raifonnement. La quantité u marquant en général la fomme de 8 racines quelconques prifes des 16 racines de l'équation propofée, il eft clair par les regles des combinaifons, que la quantité u eft fufceptible d'autant de valeurs differentes, qu'il y a d'unités dans cette formule:

$$\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 12870$$

Donc l'équation, qui déterminera les valeurs de l'inconnuë u fera néceffairement du 12870me degré. Or puifque la fomme de toutes les 16

 racines

racines de l'équation proposée est $= 0$, si la somme de 8 quelconques, c. à. d. une valeur de u est $= p$, la somme des 8 autres sera $= -p$, & partant $-p$ est aussi une valeur de u. Ou bien si $u - p$ est un facteur de l'équation, qui détermine u, $u + p$ en sera aussi un facteur, donc leur produit $uu - pp$ renfermant les deux racines p & $-p$ en sera ausi un facteur. Par conséquent cette équation sera composée de $\frac{1}{2}.12870 = 6435$ facteurs de la forme $uu - pp$, ou elle sera le produit de tels facteurs :

$$(uu - pp)\ (uu - qq)\ (uu - rr)\ (uu - ss)\ \&c. = 0$$

le nombre de ces facteurs étant $= 6435$. Or ce nombre étant impair le dernier terme ou l'absolu de cette équation sera $= -ppqqrrss$ &c. Posant donc $pqrs$ &c. $= \mathrm{P}$, il est certain, que P est déterminable par les coëfficiens B, C, D, E, &c. en sorte qu'il en est une fonction rationnelle, & partant réelle. Donc le dernier terme de notre équation, qui doit servir à déterminer u, sera $= -\mathrm{PP}$, c. à. d. il sera essentiellement negatif. De la il s'ensuit que cette équation aura nécessairement au moins deux racines réelles, l'une affirmative & l'autre negative, qui par conséquent étant prises pour $+u$ & $-u$ fourniront deux facteurs réels du 8me degré de l'équation proposée. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 41. Donc puisque chacun de ces deux facteurs du 8me degré est résoluble en 4 facteurs réels du 2 degré, il est clair que toute équation du 16 degré est résoluble en 8 facteurs doubles réels : & une équation du 17me degré ayant certainement un facteur simple réel, elle aura outre cela encore 8 facteurs doubles réels.

COROLL. II.

§. 42. La même résolubilité en facteurs réels, ou simples, ou doubles, aura aussi lieu en toutes les équations d'un degré inferieures que le 16me. Car multipliant une telle équation par x, ou x^2, ou x^3 &c. pour l'elever au 16 degré, on en cherchera les 8 facteurs doubles réels, desquels retranchant les facteurs x, qui y ont été introduits par

la

la multiplication, on aura les facteurs réels de la propoſée, qui feront ou ſimples ou doubles.

COROLL. III.

§. 43. Il eſt donc démontré, que toutes les équations, qui ne ſurpaſſent pas le 17me degré, ſont toujours réſolubles en facteurs réels, ou ſimples, ou doubles.

SCHOLIE.

§. 44. Si nous examinons la force de ces démonſtrations, nous trouverons qu'elle conſiſte en ce que l'équation finale qui renferme la ſeule inconnüe u, devient d'un degré pair & que ſon dernier terme eſt un quarré negatif; ce qui eſt arrivé dans la réſolution des équations du 4me, 8me & 16me degré. On s'appercevra de même, que la derniere circonſtance du terme abſolu negatif ne ſauroit avoir lieu, à moins que l'expoſant du degré de l'équation pour u ne ſoit un tel nombre pair comme $2n$, que ſa moitié n eſt un nombre impair: car le dernier terme étant le produit de n quarrés negatifs, deviendroit poſitif, ſi n étoit un nombre pair. Et c'eſt la raiſon que notre démonſtration ne ſauroit être appliquée à des équations du 12me ou 20me degré; car ſi nous voulions opérer de la même maniere ſur une équation par exemple du 20 degré, en la décompoſant en deux facteurs du 10 degré comme $x^{10} + ux^9 + \&c.$ & $x^{10} - ux^9 + \&c.$ aprés avoir fait évanouïr le ſecond terme, on verroit que la quantité u dût etre déterminée par une équation du

$$\frac{20.\,19.\,18.\,17.\,16.\,15.\,14.\,13.\,12.\,11}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10} = 4.\,11.\,13.\,17.\,19 \text{ degré}$$

dont la moitié étant encore un nombre pair, produiroit le dernier terme de l'équation affirmatif, & on n'en ſauroit plus tirer la concluſion dont nous avons beſoin. Or pour peu que nous réflechiſſons ſur cette circonſtance, nous trouverons, que le dernier terme ne devient néceſſairement negatif, que lorsque l'équation propoſée eſt d'un degré, dont l'expoſant eſt une puiſſance de 2, & partant la maniere de démon-

montrer, dont je me sers ici, n'aura lieu aprés, que dans les équations du 32me & 64me & 128me &c. degré. Or ces cas sont suffisans pour notre dessein, puisqu'ayant démontré la résolubilité en facteurs réels pour des équations d'un degré quelconque, elle vaut aussi pour toutes les équations d'un degré inferieur.

Theoreme VII.

§. 45. *Toute équation d'un degré, dont l'exposant est une puissance du binaire comme* 2^n (*n étant un nombre entier plus grand que* 1) *est résoluble en deux facteurs réels du degré* 2^{n-1}.

DEMONSTRATION.

Ayant fait évanouir le second terme l'équation dont il s'agit, sera de cette forme :

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + Dx^{2^n-4} + \&c. = 0.$$

où le nombre des coëfficiens B, C, D, &c. est $= 2^n - 1$. Supposons maintenant les deux facteurs cherchés :

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \&c. = 0$$

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} + \mu x^{2^{n-1}-3} + \&c. = 0$$

où le nombre des coëfficiens à déterminer u, α, β, &c. est aussi $= 2^n - 1$. Or la comparaison du produit de ces deux facteurs avec la proposée fournit autant d'égalités, de sorte que toutes les lettres α, β, γ, &c. se pourront déterminer par les connuës B, C, D, &c. & u reellement sans extraction de racines ; or enfin pour déterminer l'inconnuë u, on parviendra à une équation, qui aura pour exposant de son degré,

$$\frac{2^n\ (2^n-1)\ (2^n-2)\ (2^n-3)\ (2^n-4)\ldots\ldots(2^{n-1}+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5\quad \ldots\ldots\quad 2^{n-1}}$$

comme

comme on fait par les regles de combinaiſon. Soit N cet expoſant du degré de l'équation pour u, & en renverſant l'ordre des facteurs du denominateur, on aura:

$$N = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^2 - 1}{2^{n-1} - 1} \cdot \frac{2^n - 2}{2^{n-1} - 2} \cdot \frac{2^n - 3}{2^{n-1} - 3} \cdot \frac{2^n - 4}{2^{n-1} - 4} \cdots \frac{2^{n-1} + 1}{1}.$$

& abaiſſant chaque fraction aux plus petits termes:

$$N = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2} - 1} \cdot \frac{2^n - 3}{2^{n-1} - 3} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2} - 1} \cdots \frac{2^{n-1} + 1}{1}.$$

Or il eſt ſeur que ce nombre N eſt entier, & puisque tant le produit des numerateurs que des denominateurs eſt impair, ce nombre ſera impairement pair, ou ſa moitié un nombre impair: il ſera donc en commençant par la derniere fraction:

$$\tfrac{1}{2} N = \frac{2^{n-1} + 1}{1} \cdot \frac{2^{n-2} + 1}{1} \cdot \frac{2^{n-1} + 3}{3} \cdot \frac{2^{n-3} + 1}{1} \cdot \frac{2^{n-1} + 5}{5} \cdots \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1}.$$

Mais puisque le ſecond terme de l'équation propoſée manque, ſi p eſt une racine u, il en ſera $-p$ auſſi une racine, & partant $uu - pp$ un facteur double, & le nombre de tous les facteurs de cette forme ſera $= \frac{1}{2}$ N c. à. d. un nombre impair. Par conſéquent le dernier terme de l'équation pour u ſera un quarré negatif, ce qui eſt une marque que cette équation renferme au moins deux valeurs réelles, l'une pour u & l'autre pour $-u$; d'où l'on formera deux facteurs réels du degré 2^{n-1} de l'équation propoſée. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 46. Toute équation donc du 32me degré eſt réſoluble en deux facteurs réels du 16me degré, & partant par le theoreme précédent auſſi réſoluble en 16 facteurs réels du ſecond degré. Ce qui doit s'entendre auſſi de toutes les équations au deſſous du 32me degré, qu'on pourra par ce moyen décompoſer en facteurs réels ou ſimples ou doubles.

COROLL. II.

§. 47. Puisque ensuite toute équation du 64me degré est résoluble en deux facteurs réels du 32me degré, toutes les équations, qui n'excedent pas le 64me ou 65me degré, seront aussi résolubles en facteurs réels tous, ou simples, ou doubles.

COROLL. III.

§. 48. De la même maniere on étendra cette résolubilité en facteurs réels, ou simples, ou doubles, successivement aux équations du 128me, 256me, 512me &c. degré; de sorte qu'il est à présent certain, que toute équation de quelque haut degré qu'elle soit, est toujours résoluble en facteurs réels, ou simples, ou du second degré.

SCHOLIE.

§. 49. Voilà donc une démonstration complette de la proposition, qu'on suppose communément dans l'analyse & principalement dans le calcul integral; par laquelle on prétend, que toute fonction rationnelle d'une variable x comme $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ &c. se peut toujours résoudre en facteurs réels ou simples de la forme $x+p$ ou doubles de la forme $xx+px+q$. C'est de la possibilité de cette résolution, qu'on a tiré cette belle & importante conséquence, que l'integrale d'une telle formule differentielle $\frac{P\,dx}{Q}$, où P & Q marquent des fonctions rationnelles quelconques de x, se peut toujours exprimer, ou algébriquement, ou par des logarithmes, ou par des arcs de cercle. Or pour ce qui regarde la solidité de la démonstration, que je viens de donner de cette belle proprieté des équations, je crois qu'on n'y trouvera rien à redire, après qu'on aura bien pesé les remarques, que j'y ai ajoutées; cependant en cas qu'on voulut faire des difficultés de reconnoitre la bonté de ces démonstrations, je m'en vai ajouter quelques propositions rélatives à ce sujet, qui ne sont pas dépendantes des précedentes, & dont la verité servira à lever tous les doutes qu'on pourroit encore avoir.

Theo-

Theoreme VIII.

§. 50. *Toute équation du 6me degré a au moins un facteur réel du second degré, indépendamment des démonstrations précedentes.*

DEMONSTRATION.

Soit l'équation proposée du 6me degré

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex \mp F = 0$$

dont un facteur double quelconque soit $xx - ux + v$; l'autre facteur sera donc du quatrieme degré comme;

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

& on comprend, que si l'un est réel, l'autre le doit être aussi. Le produit de ces deux facteurs devant être egal à la proposée, on parviendra à 6 égalités, d'ou il faut déterminer les coëfficiens supposés u, v, α, β, γ, δ, & cette détermination se pourra faire, comme j'ai deja remarqué par des expressions rationelles, jusques à la derniere, qui soit du coëfficient u, dont il faudra tirer la valeur d'une équation d'un certain nombre de degrés; de sorte que si l'on pourra trouver une valeur réelle de u, celles des autres coëfficiens α, β, γ, &c. deviendront aussi réelles, & partant aussi les facteurs supposés mêmes. Il s'agit donc de considerer l'équation, qui déterminera u, pour voir si elle contient des valeurs réelles. Or il est clair, qu'en général u est la somme de deux racines quelconques de l'équation proposée; & partant elle sera susceptible d'autant de valeurs differentes, qu'il y a d'unités dans cette formule $\frac{6.5}{1.2} = 15$. Donc il faut absolument que l'équation pour déterminer u contienne 15 valeurs differentes, ni plus ni moins; & ainsi cette équation sera du 15me degré, c. à. d. d'un degré impair. Elle aura donc seurement une racine réelle, qui étant posée pour u nous fournira un facteur réel du second degré $xx - ux + v$ de l'équation proposée du 6me degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

§. 61. Toute équation donc du ſixiéme degré peut toujours ſe réſoudre en deux facteurs réels, dont l'un eſt du ſecond & l'autre du quatriéme degré: & puiſque celui-cy eſt réſoluble en deux facteurs réels du ſecond degré, on aura trois facteurs réels doubles, dont l'équation du 6me degré eſt compoſée.

SCHOLIE.

§. 52. Je ſuppoſe ici la poſſibilité de réſoudre une équation du 4me degré en deux facteurs réels doubles, quoique mon deſſein ſoit de rendre cette propoſition & quelques ſuivantes indépendantes des démonſtrations precedentes. Car quand même on douteroit de leur ſolidité, ce doute ne ſauroit rouler, que ſur les équations du 8me, 16me &c. degré; puisque la démonſtration pour les équations du 4me degré eſt tout à fait accomplie, ayant même déduit l'équation, d'où il faut déterminer l'inconnuë u, par les opérations algébriques, ce qui ne pouvoit pas s'executer dans les équations d'un plus haut degré, où il faloit avoir recours à quelques principes particuliers. Il eſt donc remarquable, que la réſolution d'une équation du 6me degré eſt prouvée ici par celle du 4me degré, au lieu que ſuivant les theoremes precedens, il n'a pas été permis de reconnoitre la poſſibilité de cette réſolution, qu'aprés avoir démontré celle des équations du 8me degré. Maintenant donc nous ſommes convaincus, que toute équation du ſixiéme degré eſt réſoluble en trois facteurs doubles réels, quand même il ſeroit impoſſible de réſoudre pareillement les équations du 8me degré. Or la methode dont je me ſuis ſervi ici pour prouver la réſolution des équations du 6me degré, s'etend également à toutes les équations d'un degré, dont l'expoſant eſt un nombre impairement pair, ou dont la moitié eſt un nombre impair; comme je ferai voir dans le theoreme ſuivant. Au reſte il eſt ici encore à remarquer, qu'en vertu de ce theoreme auſſi toute équation du 7me degré eſt réſoluble en un facteur ſimple & trois doubles, tous réels.

Theoreme IX.

§. 53. *Toute équation d'un degré, dont l'expoſant eſt un nombre de cette forme $4n+2$, a toujours au moins un facteur réel du ſecond degré, & cela indépendamment des démonſtrations ſuperieures.*

DEMONSTRATION.

L'équation propoſée étant de cette forme:

$$x^{4n+2} + Ax^{4n+1} + Bx^{4n} + Cx^{4n-1} + \&c. \ldots = 0$$

ſoit un de ſes facteurs doubles quelconque $xx - ux + v$, & il eſt certain que u ſera la ſomme de deux racines quelconques de l'équation propoſée. Or le nombre de toutes les racines étant $= 4n+2$, ſi l'on en combine deux, le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles ſera $= \frac{(4n+2)}{1}\frac{(4n+1)}{2} = (2n+1)(4n+1)$; & la lettre u ſera ſusceptible d'autant de valeurs; ou bien u ſe déterminera par une équation d'un degré dont l'expoſant $= (2n+1)(4n+1)$, qui étant impair cette équation aura néceſſairement une racine réelle, qui étant miſe pour u donnera le facteur dou' le $xx - ux + v$ réel. D'où il s'enſuit que toute équation d'un degré $4n+2$ a toujours au moins un facteur réel du ſecond degré. C.Q.F.D.

COROLL. I.

§. 54. Donc ſi une équation du huitiéme degré eſt réſoluble en 4 facteurs doubles réels, toute équation du 10me degré pourra étre réſolue en 5 facteurs doubles réels, & pour prouver cela on n'a pas beſoin de recourir aux équations du 16me degré, comme auparavant.

COROLL. II.

§. 55. Et ſi toute équation du degré 2^m eſt réſoluble en 2^{m-1} facteurs doubles réels, ce theoreme prouve la réſolubilité en facteurs doubles réels des équations du degré $2^m + 2$. Et de plus les équations des degrés $2^m + 1$ & $2^m + 3$ permetront auſſi la réſolution en

facteurs réels, ou simples, ou doubles, puisqu'étant d'un degré impair elles ont au moins un facteur simple réel.

Theoreme X.

§. 56. *Toute équation d'un degré, dont l'exposant est un nombre de la forme $8n+4$, a au moins un facteur réel du quatrieme degré; & cela indépendamment des démonstrations superieures.*

DEMONSTRATION.

Si l'on pose un facteur quelconque du 4me degré

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

le coëfficient u sera la somme de 4 racines quelconques de l'équation proposée. Or cette équation ayant $8n+4$ racines, le nombre de toutes les valeurs possibles, dont la quantité u est susceptible, est $= \frac{(8n+4)}{1}\frac{(8n+3)}{2}\frac{(8n+2)}{3}\frac{(8n+1)}{4}$

$= \frac{(2n+1)(8n+3)(4n+1)(8n+1)}{3}$, & partant la quantité u sera déterminée par une équation du même degré: & il est clair que l'exposant de ce degré étant un nombre entier sera impair. Donc cette équation aura au moins une racine réelle, qui étant mise pour u les autres coëfficiens α, β, γ, en seront aussi déterminés réellement, & on obtiendra un facteur réel du quatrième degré. C.Q.F.D.

COROLL. I.

§. 57. Donc puisqu'un facteur réel du 4me degré est incontestablement résoluble en deux facteurs réels du second degré, toute équation d'un degré $8n+4$ aura certainemeut deux facteurs doubles réels, au moins, & les équations du $8n+5$^me degré auront outre cela un facteur simple réel de plus.

COROLL. II.

§. 58. Les équations du 12me degré étant de ce nombre, auront donc deux facteurs doubles réels, & le troisiéme facteur sera du 8me degré.

degré. Donc si celui-ci est résoluble en 4 facteurs doubles réels, on aura en tout 6 facteurs doubles réels, sans qu'on ait besoin de monter aux équations du 16me degré pour prouver cela.

SCHOLIE.

§. 59. On prouvera par un semblable raisonnement, que toute équation d'un degré $16n+8$ a un facteur réel du 8me degré au moins, & on passera de même aux équations de $32n+16$, $64n+32$, $128n+64$ &c. dimensions pour prouver qu'elles ont au moins un facteur réel du 16me, ou du 32me, ou du 64me degré. &c. De là on tirera cette conséquence, que toutes les équations depuis le 8me degré jusqu'au 16me se peuvent résoudre en facteurs réels, ou simples, ou doubles, en ne supposant que la résolution des équations du 4me & 8me degré, & en general la résolution de toute équation se pourra faire, sans qu'on ait besoin de la réduire à un degré plus haut, comme nous avons été obligé de faire, en n'employant que la résolution des équations, dont l'exposant du degré est une puissance du binaire. Combinant donc ces deux manieres de démontrer ensemble, on ne balancera plus d'accorder ce Theoreme général, que toute équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, est toujours résoluble en facteurs réels, ou simples, ou doubles. Cependant il faut avouër, qu'il est pour la pluspart impossible d'executer cette résolution, ou d'assigner actuellement ces facteurs réels; puisque dès qu'une équation passe le quatrième degré, les regles de l'algébre ne sont plus suffisantes à nous découvrir les racines. Mais pour le bût, qu'on a en vuë en établissant ce Theoreme général, il suffit qu'on soit asseuré, qu'une telle résolution est toujours possible, quoiqu'on ne la puisse jamais executer.

Theoreme XI.

§. 60. *Si une équation algébrique, de quelque degré qu'elle soit, a des racines imaginaires, chacune sera comprise dans cette formule générale* $M+N\sqrt{-1}$, *les lettres* M & N *marquant des quantités réelles.*

DEMON-

DEMONSTRATION.

Soit l'équation proposée quelconque du degré n:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

de ſorte que le nombre de toutes ſes racines ſoit $= n$. Qu'on décompoſe cette équation dans tous ſes facteurs réels, qui ſeront ou ſimples de la forme $x - p = o$, ou du ſecond degré de la forme $xx - 2px + q = o$; & toutes les racines ſe trouveront par la réſolution des égalités, que ces facteurs, étant poſés $= 0$, fourniſſent. Or chaque facteur ſimple ou l'équation $x - p = o$ donne une racine réelle $x = p$; & chaque facteur double ou l'équation $xx - 2px + q = o$ renferme deux racines

$$x = p + \sqrt{(pp - q)} \quad \& \quad x = p - \sqrt{(pp - q)}$$

qui ſeront auſſi réelles ſi $pp > q$. Mais ſi $pp < q$, ſoit $q = pp + rr$, & il ſera $\sqrt{(pp - q)} = \sqrt{-rr} = r\sqrt{-1}$; donc ces deux racines ſeront imaginaires, ſavoir:

$$x = p + r\sqrt{-1} \quad \& \quad x = p - r\sqrt{-1}$$

Ayant donc démontré, qu'il eſt toujours poſſible de réſoudre toute équation en facteurs, ou ſimples, ou doubles réels, toutes les racines ſeront auſſi, ou réelles, ou imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, où M & N ſont des quantités réelles, de ſorte que l'imaginaire, qui y entre, n'eſt contenu que dans la forme $\sqrt{-1}$. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 61. Si donc parmi les racines imaginaires d'une équation quelconque, ſe trouve une $x = p + r\sqrt{-1}$, il s'y trouvera auſſi certainement celle-cy $x = p - r\sqrt{-1}$; ce qui eſt evident tant de la démonſtration de ce theoreme, que de la nature du ſigne radical $\sqrt{-1}$, qui renferme eſſentiellement auſſi bien le ſigne $+$ que le ſigne $-$: de ſorte que connoiſſant une racine imaginaire d'une équation quelconque, l'autre ſe découvre d'elle-meme.

COROL-

COROLL. II.

§. 62. Ayant déjà fait voir que le nombre de toutes les racines imaginaires, qu'une équation quelconque contient, eſt pair, chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ aura parmi les autres ſon compagnon $x = p - r\sqrt{-1}$, qui lui appartient plus que toutes les autres; vu que tant la ſomme de ces deux racines $2p$, que leur produit $pp + rr$, ſont des quantités réelles.

COROLL. III.

§. 63. De là il eſt auſſi clair que ſi $x - p - r\sqrt{-1}$ eſt un facteur imaginaire d'une équation quelconque, la formule $x - p + r\sqrt{-1}$ en ſera auſſi un facteur. Et ces deux facteurs joints enſemble donneront un facteur double réel de la même équation, lequel ſera $xx - 2px + pp + rr$.

SCHOLIE.

§. 64. On comprend de là réciproquement, que ſi l'on pouvoit démontrer, que toutes les racines imaginaires d'une équation quelconque euſſent néceſſairement la forme $M + N\sqrt{-1}$, il ſeroit aiſé d'en démontrer, que toute équation fut auſſi réſoluble en facteurs réels, ou ſimples, ou du ſecond degré. Car les racines réelles fourniroient toujours autant de facteurs ſimples réels, & chaque racine imaginaire $x = p + r\sqrt{-1}$ étant jointe avec ſa compagne $x - p - r\sqrt{-1}$ produiroit un facteur double réel $xx - 2px + pp + rr$; de ſorte que ſi une équation du degré $n = \alpha + 2\beta$, avoit α racines réelles, & 2β racines imaginaires, dont chacune fut de la forme $M + N\sqrt{-1}$, il ſeroit démontré, que cette équation eut α facteurs ſimples réels, & β facteurs doubles réels. Or il paroit très vraiſemblable que toute racine imaginaire, quelque compliquée qu'elle ſoit, eſt toujours réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & Mr. d'Alembert a prouvé cela dans ſon excellente piece ſur le Calcul intégral, qui ſe trouve dans le II. Volume de nos Memoires, d'une telle maniere qu'il n'y reſte plus le moindre doute. Cependant comme il a emploïé dans ſa demonſtration des quantités infiniment petites, quoique cette conſidération n'en puiſſe

pas

pas diminuer la force, je tacherai de tirer aussi de cette source une démonstration rigoureuse du theoreme général, auquel cette piece est destinée, sans avoir recours à des quantités infiniment petites. Or pour cet effet j'aurai besoin de quelques Theoremes préliminaires.

Theoreme XII.

§. 65. *Toute fonction, qui est formée, ou par addition, ou par soustraction, ou par multiplication, ou par division d'autant de formules imaginaires de cette forme* $M + N\sqrt{-1}$ *que ce soit, sera toujours comprise dans la même forme* $M + N\sqrt{-1}$, *les lettres* M & N *marquant des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Qu'on s'imagine plusieurs formules imaginaires de la forme indiquée, lesquelles soient:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\,;\ \gamma + \delta\sqrt{-1}\,;\ \epsilon + \zeta\sqrt{-1}\,;\ \eta + \theta\sqrt{-1}\,;\ \&c.$$

& est il d'abord clair, qu'en ajoutant ces formules ensemble, ou en retranchant quelques unes, l'expression qui en résulte sera toujours comprise dans cette forme $M + N\sqrt{-1}$. Il est aussi clair que si l'on multiplie deux ou plusieurs de ces formules ensemble, le produit sera toujours contenu dans la formule $M + N\sqrt{-1}$: car le produit de deux $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ & $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ étant $\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}$, a la forme $M + N\sqrt{-1}$, laquelle étant outre cela multipliée par $\epsilon + \zeta\sqrt{-1}$ donnera encore cette forme, & ainsi de suite. Il ne s'agit donc plus que de la division: or il est clair que ce cas se réduit toujours à une telle fraction $\frac{A + B\sqrt{-1}}{C + D\sqrt{-1}}$, où tant le numerateur que le denominateur est déjà composé par les trois premiéres opérations, l'addition, la soustraction & la multiplication, d'autant de formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. Or cette fraction se réduira à une autre, dont le denominateur sera réel, en multipliant

en

en haut & en bas par $C - D\sqrt{-1}$; car alors on aura $\frac{AC + BD + (BC - AD)\sqrt{-1}}{CC + DD}$, de forte que posant M pour $\frac{AC + BD}{CC + DD}$ & N pour $\frac{BC - AD}{CC + DD}$, on aura cette forme $M + N\sqrt{-1}$. Par conséquent cette forme demeure inalterée, par quelques opérations qu'on joigne ensemble autant de formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'on voudra. C. Q. F. D.

COROLL. I.

§. 66. De là il est aussi evident que toutes les puissances, dont l'exposant est un nombre entier positif, d'une formule imaginaire $A + B\sqrt{-1}$, auront toujours la même forme $M + N\sqrt{-1}$; puisque ces puissances se forment par la multiplication.

COROLL. II.

§. 67. Ensuite, puisque la puissance $(A + B\sqrt{-1})^n$ est contenuë dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, si n est un nombre entier positif, la même forme aura lieu si n est un nombre entier negatif. Car ayant

$$(A + B\sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(A + B\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{M + N\sqrt{-1}}$$

cette forme se réduit à $\frac{M - N\sqrt{-1}}{MM + NN}$.

COROLL. III.

§. 68. La forme générale $M + N\sqrt{-1}$ comprend aussi toutes les quantités réelles, lorsqu'on pose $N = 0$. Donc joignant ensemble par les quatre opérations mentionnées, non seulement des formules imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, mais aussi des réelles, le produit sera toujours compris dans la forme $M + N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 69. Il peut aussi arriver que ce produit, quoiqu'il soit formé des formules imaginaires, devient réel, les imaginaires se détruisant

mutuellement, ou rendant $N = 0$. Ainsi le produit de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ est réel ; & on sait que $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$.

Theoreme XIII.

§. 70. *De quelque puissance qu'on extraye la racine, ou d'une quantité réelle, ou d'une imaginaire de la forme* $M + N\sqrt{-1}$, *les racines seront toujours, ou réelles, ou imaginaires de la même forme* $M + N\sqrt{-1}$.

DEMONSTRATION.

Soit n l'exposant de la puissance dont il faut extraire la racine, de sorte qu'on ait à considérer les valeurs, ou de $\sqrt[n]{a}$, ou de $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$. Or puisque celle-cy se change en celle-là, si $b = 0$, il suffit de prouver que $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$ ou $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ est contenu dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, quelque grand que soit le nombre n. Pour prouver cela, qu'on cherche un angle ϕ tel que sa tangente soit $= \frac{b}{a}$, ou posant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, qu'on prenne l'angle ϕ tel, que son sinus soit $= \frac{b}{c}$ & le cosinus $= \frac{a}{c}$: on aura donc $a + b\sqrt{-1} = c(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)$, puisque $\cos\phi = \frac{a}{c}$ & $\sin\phi = \frac{b}{c}$. Or il est démontré qu'une puissance quelconque d'une telle forme, comme $(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)^m$ est $= \cos m\phi + \sqrt{-1}.\sin m\phi$, quelque nombre qu'on signifie par la lettre m, soit qu'il soit affirmatif, ou negatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationnel. Cela posé on aura $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})} = c^{\frac{1}{n}}(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)^{\frac{1}{n}} = \left(\cos\frac{1}{n}\phi + \sqrt{-1}.\sin\frac{1}{n}\phi\right)\sqrt[n]{c}$. Donc puisque $c = \sqrt{(aa + bb)}$ est une quantité réelle & positive, & l'angle ϕ & partant aussi sa partie

tie $\frac{1}{n}\varphi$ avec ſon ſinus & coſinus auſſi des quantités réelles ; il eſt evident que $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$ ou $\left(\cos\frac{1}{n}\varphi+\sqrt{-1}.\ \sin\frac{1}{n}\varphi\right)\sqrt[n]{c}$ appartient à la forme $M+N\sqrt{-1}$. Donc toutes les racines d'une quantité réelle ou imaginaire de cette forme $M+N\sqrt{-1}$, ſont toujours compriſes dans la formule générale $M+N\sqrt{-1}$. C.Q.F.D.

COROLL. I.

§. 71. Comme on ſait que toute quantité a deux racines quarrées, trois racines cubiques, quatre racines quarré-quarrées & ainſi de ſuite, on trouve par cette methode toutes les racines, dont le nombre eſt $= n$, puiſque $\frac{1}{n}\varphi$ a autant de valeurs differentes.

COROLL. II.

§. 72. Car puiſque φ eſt l'angle donc le ſinus eſt $=\frac{b}{c}$ & le coſinus $=\frac{a}{c}$; au lieu de φ on peut auſſi prendre les angles $4\varrho+\varphi$; $8\varrho+\varphi$; $12\varrho+\varphi$ &c. ϱ marquant l'angle droit, puiſque tous ces angles ont le méme ſinus & coſinus. Mettant donc dans la racine trouvée $\left(\cos\frac{1}{n}\varphi+\sqrt{-1}.\sin\frac{1}{n}\varphi\right)\sqrt[n]{c}$ pour φ ces angles φ; $4\varrho+\varphi$; $8\varrho+\varphi$; $12\varrho\mp\varphi$ &c. on trouvera autant d'expreſſions differentes, qu'il y a d'unités dans l'expoſant n.

COROLL. III.

§. 73. Puiſque n peut marquer un nombre quelconque, il s'enſuit de notre démonſtration, que non ſeulement $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})}$ ou n eſt un nombre entier poſitif, mais en général que cette expreſſion $(a+b\sqrt{-1})^m$, quelque nombre qui ſoit marqué par m ou poſitif, ou

 nega-

negatif, ou entier, ou rompu, ou même irrationel, est toujours comprise dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 74. Par conséquent non seulement les quatre opérations de l'arithmetique, mais aussi l'extraction des racines, de quelque degré qu'elles soient, ne changent point la forme $M + N\sqrt{-1}$ des quantités imaginaires, auxquelles on les applique d'une maniére quelconque.

SCHOLIE

§. 75. Si la quantité, dont on cherche toutes les racines d'un certain degré, est réelle ou $b = 0$, il sera $c = \sqrt{aa}$, d'où l'on aura pour c un valeur positive, quand même a auroit une negative; & l'angle Φ sera ou $= 0$, ou $= 180°$, selon que le cosinus $\frac{a}{c}$ sera ou $= +1$ ou $= -1$. Donc le premier cas ou a est positif & $c = a$: les valeurs de Φ seront donc 0, 4ϱ, 8ϱ, 12ϱ &c. & les racines du degré n du nombre a seront, posant ϱ pour la marque d'un angle droit:

$$\sqrt[n]{a}; \left(\cos\frac{4\varrho}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{4\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}; \left(\cos\frac{8\varrho}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{8\varrho}{n}\right.\sqrt[n]{a} \text{ \&c.}$$

Or si a est un nombre negatif, on aura les expressions suivantes, ou bien les valeurs de $\sqrt[n]{-a}$ seront:

$$\left(\cos\frac{2\varrho}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}; \left(\cos\frac{6\varrho}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{6\varrho}{n}\right)\sqrt[n]{a}; \text{ \&c.}$$

mettant pour Φ successivement 2ϱ, 6ϱ, 10ϱ, 14ϱ &c. Mais cette matiere étant déja suffisamment developpée, je me borne ici à cette unique conséquence, que l'extraction des racines, tant des quantités réelles qu'imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$ produit toujours ou des quantités réelles, ou des imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$.

Theore-

Theoreme. XIV.

§. 76. *De quelque degré que soit une équation algébrique, toutes les racines imaginaires qu'elle peut avoir, sont toujours comprises dans cette forme générale* $M+N\sqrt{-1}$; *de sorte que* M *&* N *sont des quantités réelles.*

DEMONSTRATION.

Soit en general l'équation proposée:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. = 0.$$

& quoique nous ne soyons pas en état d'assigner la formule générale, qui en contient les racines, comme nous le sommes pour les équations du second, troisiéme & quatriéme degré, il est pourtant certain, que cette formule sera composée de plusieurs signes radicaux, dont les quantités connuës A, B, C, D, E, &c. seront compliquées. On peut aussi remarquer que cette expression analytique d'une racine quelconque renfermera plusieurs membres, dont chacun sera la racine d'un certain degré d'une quantité, qui renferme encore des signes radicaux, & que ceux-cy auront aprés eux encore d'autres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne en chaque membre au dernier signe radical, qui n'affecte plus que des quantités réelles. Remontons de ces derniers signes successivement, & il est évident que la quantité marquée par le dernier signe sera, ou réelle, ou imaginaire de la forme $M + N\sqrt{-1}$. Ensuite devant cette quantité, jointe avec quelque valeur, ou réelle, ou imaginaire aussi de la forme $M + N\sqrt{-1}$, se trouvera un nouveau signe radical, qui se réduira donc à $\sqrt[n]{(M+N\sqrt{-1})}$, dont la valeur est encore de la forme $M+N\sqrt{-1}$; & si nous remontons de cette maniére jusqu'aux premiers signes radicaux, qui distingue les membres, nous verrons, qu'aucune opération ne nous sauroit écarter de cette forme, & que par conséquent chaque membre aura enfin la meme forme, quelque grand que soit le nombre des signes radicaux, qui y sont sont enveloppés. D'où il s'ensuit que l'expression générale, qui renferme

ferme toutes les racines de l'équation proposée, se réduira nécessairement à la forme $M+N\sqrt{-1}$, de sorte que toutes les racines imaginaires ne sauroient avoir d'autre forme que celle-cy. C.Q.F.D.

SCHOLIE I.

§. 77. Voilà donc une nouvelle démonstration du Theoreme général, que je me suis proposé de prouver ici, & contre laquelle on ne sauroit rien objecter, si ce n'est, que nous ne savons pas, comment les racines des équations des plus hauts degrés après le 4me sont compliquées. Or cette objection n'aura aucune force, pourvu qu'on m'accorde, que les expressions pour les racines ne contiennent point d'autres opérations, que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires: & l'on ne sauroit soutenir que des opérations transcendantes s'y mêlassent. Mais si la conjecture, que j'ai autrefois avancée sur la forme des racines des équations d'un ordre quelconque, est fondée, la démonstration que je viens de donner ici, aura toute la force, qu'on peut souhaiter. Car ayant une équation quelconque du degré n, je dis qu'il y aura toujours une équation du degré $n-1$, dont les racines étant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. au nombre de $n-1$, une racine quelconque de l'autre équation du degré n sera $= a + \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} +$ &c. où a est une quantité réelle. Donc si les racines de l'équation du degré $n-1$ sont, ou réelles, ou de la forme $M+N\sqrt{-1}$, les racines de l'équation du degré n auront aussi cette forme. Par conséquent puisque les racines des équations du second degré sont, ou réelles, ou de la forme $M+N\sqrt{-1}$, les racines des équations du troisiéme degré se réduiront aussi à la même forme, & partant aussi les racines des équations du 4me, 5me, 6me &c. à l'infini.

SCHOLIE II.

§. 78. De là on tirera encore cette importante conséquence, que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, est toujours réductible à cette formule $M+N\sqrt{-1}$; de sorte que toute quantité imaginaire est toujours composée de deux membres, dont l'un est

eſt une quantité réelle indiquée par M, et l'autre eſt le produit d'une quantité auſſi réelle comme N, multipliée par $\sqrt{-1}$; de maniere que $\sqrt{-1}$ eſt la ſeule ſource de toutes les expreſſions imaginaires. Car ſi nous regardons l'origine des quantités imaginaires, qui eſt l'extraction des racines ou la réſolution des équations, il eſt démontré, que toutes les quantités imaginaires qui en découlent, ſont toujours compriſes dans cette forme $M+N\sqrt{-1}$, & de plus j'ai fait voir, que de quelque maniere qu'on traite une ou pluſieurs quantités imaginaires de cette forme par les opérations de l'analyſe, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion & l'extraction des racines, toutes les expreſſions qui en réſultent, ſe réduiſent toujours à la même forme $M+N\sqrt{-1}$. On ſera donc obligé d'accorder cette verité, entant que ce ne ſont que les opérations algébriques, par lesquelles les formules imaginaires ſont compliquées; mais on doutera peut-être, ſi les quantités imaginaires, qui dérivent des opérations transſcendentes, comme ſont celles qui impliquent la nature des logarithmes ou des angles, ſont encore réductibles à la même forme. Or pour lever ce doute je ferai voir, que toutes les opérations tranſcendantes, qui ſont connües, n'ecartent point les quantités imaginaires qu'elles produiſent, de la forme marquée, & quoiqu'il ſoit impoſſible d'appliquer le même raiſonnement à toutes les opérations tranſcendantes, les propoſitions ſuivantes ôteront tout ſujet de douter davantage de la verité de cette propriété générale de toutes les quantités imaginaires, de quelque ſource qu'elles puiſſent tirer leur origine.

Probleme I.

§. 79. *Une quantité imaginaire étant élevée à une puiſſance, dont l'expoſant eſt une quantité réelle quelconque, déterminer la forme imaginaire qui en reſulte.*

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, & m l'expoſant réel de la puiſſance, de ſorte qu'il s'agit de déterminer M & N, pour qu'il ſoit

$$(a+b\sqrt{-1})^m = M+N\sqrt{-1}.$$

 Poſons

Posons $\sqrt{(aa+bb)} = c$, & c sera toujours une quantité réelle & positive, car nous ne regardons pas ici l'ambiguité du signe $\sqrt{}$. Ensuite cherchons l'angle ϕ tel que son sinus soit $= \frac{b}{c}$ & le cosinus $= \frac{a}{c}$, ayant ici égard à la nature des quantités a & b, si elles sont affirmatives ou negatives; & il est certain, qu'on pourra toujours assigner cet angle ϕ, quelles que soient les quantités a, b; pourvu qu'elles soient réelles, comme nous le supposons. Or ayant trouvé cet angle ϕ, qui sera toujours réel, on aura en même tems tous les autres angles, dont le sinus $\frac{b}{c}$ & le cosinus $\frac{a}{c}$ sont les mêmes: car posant π pour l'angle de 180°, tous ces angles seront, ϕ, $2\pi+\phi$, $4\pi+\phi$, $6\pi+\phi$, $8\pi+\phi$, &c. auxquels on peut ajouter ceux-cy: $-2\pi+\phi$, $-4\pi+\phi$, $-6\pi+\phi$, $-8\pi+\phi$, &c. Cela posé il sera $a+b\sqrt{-1} = c(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)$, & la puissance proposée $(a+b\sqrt{-1})^m = c^m(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)^m$, où c^m aura toujours une valeur réelle positive, qu'il faut lui donner préferablement à toutes les autres valeurs, qu'il pourroit avoir. Ensuite il est démontré que $(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)^m = \cos m\phi+\sqrt{-1}.\sin m\phi$; où il faut remarquer, que puisque m est une quantité réelle, l'angle $m\phi$ sera aussi réel, & partant aussi son sinus & son cosinus. Donc nous aurons:

$$(a+b\sqrt{-1})^m = c^m(\cos m\phi+\sqrt{-1}.\sin m\phi)$$

ou bien la puissance $(a+b\sqrt{-1})^m$ est contenüe dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, en prenant $M = c^m \cos m\phi$ & $N = c^m \sin m\phi$ où il y a $c = \sqrt{(aa+bb)}$ & $\cos\phi = \frac{a}{c}$ & $\sin\phi = \frac{b}{c}$. C.Q.F.T.

COROLL. I.

§. 80. De même maniere qu'il est $(\cos\phi+\sqrt{-1}.\sin\phi)^m = \cos m\phi+\sqrt{-1}.\sin m\phi$, il sera aussi $(\cos\phi-\sqrt{-1}.\sin\phi)^m =$

cof $m\,\Phi - \sqrt{-1}.\ \text{fin}\ m\,\Phi$, & partant on aura $(a - b\sqrt{-1})^m = c^m(\text{cof}\ m\,\Phi - \sqrt{-1}.\ \text{fin}\ m\,\Phi)$, où Φ marque le même angle que dans le cas précedent.

COROLL. II.

§. 81. Si l'expofant m eft negatif, puisque $\text{fin} - m\,\Phi = -\text{fin}\ m\,\Phi$ & $\text{cof} - m\,\Phi = \text{cof}\ m\,\Phi$, il fera donc :

$$(\text{cof}\,\varphi \pm \sqrt{-1}.\ \text{fin}\,\varphi)^{-m} = \text{cof}\,m\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\ \text{fin}\ m\,\varphi \quad \&$$
$$(a \pm b\sqrt{-1})^{-m} = c^{-m}(\text{cof}\,m\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\ \text{fin}\ m\,\varphi).$$

COROLL. III.

§. 82. Si m eft un nombre entier, foit affirmatif, foit negatif, la formule $(a + b\sqrt{-1})^m$ n'aura qu'une feule valeur: car quoiqu'on fubftitue pour φ tous les angles φ ; $\pm 2\pi + \varphi$; $\pm 4\pi + \varphi$; $\pm 6\pi + \varphi$; &c. on trouvera toujours pour fin $m\,\varphi$ & cof $m\,\varphi$ les mêmes valeurs.

COROLL. IV.

§. 83. Mais fi l'expofant m eft un nombre rompu $\frac{\mu}{\nu}$, l'expreffion $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}}$ aura autant de valeurs differentes, qu'il y a d'unités en ν; car en fubftituant pour φ les angles marqués, on obtiendra autant de valeurs differentes pour fin $m\,\varphi$ & cof $m\,\varphi$, que le nombre ν contient d'unités.

COROLL. V.

§. 84. D'où il eft clair, que fi m eft un nombre irrationnel ou incommenfurable à l'unité, l'expreffion $(a + b\sqrt{-1})^m$ aura auffi une infinité de valeurs differentes, car tous les angles Φ, $\pm 2\pi + \Phi$; $\pm 4\pi + \Phi$; $\pm 6\pi + \Phi$; &c. fourniront de diverfes valeurs pour fin $m\,\Phi$ & cof $m\,\Phi$.

SCHOLIE I.

§. 85. Le fondement de la folution de ce probleme eft, que $(\text{cof}\,\Phi + \sqrt{-1}.\ \text{fin}\,\varphi)^m = \text{cof}\,m\,\varphi + \sqrt{-1}.\ \text{fin}\ m\,\varphi$, dont la ve-

 rité

rité se prouve par les theoremes connus sur la multiplication des angles. Car ayant deux angles quelconques ϕ & θ, il sera $(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)(\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta) = \cos(\phi + \theta) + \sqrt{-1}.\sin(\phi + \theta)$, ce qui est clair par la multiplication actuelle, qui donne $\cos\phi\cos\theta - \sin\phi.\sin\theta + (\cos\phi.\sin\theta + \sin\phi\cos\theta)\sqrt{-1}$. Or on sait qu'il y a $\cos\phi.\cos\theta - \sin\phi.\sin\theta = \cos(\phi + \theta)$ & $\cos\phi.\sin\theta + \sin\phi.\cos\theta = \sin(\phi + \theta)$. D'où l'on tire aisément la conséquence, qu'il est:

$$\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)^m = \cos m\phi + \sqrt{-1}.\sin.m\phi.$$

lorsque l'exposant m est un nombre entier. Mais que la même formule a lieu aussi, quand m est un nombre quelconque, la differentiation aprés avoir pris les logarithmes le mettra hors de doute. Car prenant les logarithmes on aura:

$$m\,l(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi) = l(\cos m\phi + \sqrt{-1}.\sin m\phi).$$

Maintenant traitant l'angle ϕ comme une quantité variable on aura:

$$\frac{-m\,d\phi\sin\phi + m\,d\phi\sqrt{-1}.\cos\phi}{\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi} = \frac{-m\,d\phi\sin m\phi + m\,d\phi\sqrt{-1}.\cos m\phi}{\cos m\phi + \sqrt{-1}.\sin m\phi}$$

& multipliant les numerateurs par $-\sqrt{-1}$, on obtiendra:

$$\frac{m\,d\phi(\cos\phi + \sqrt{-1} - \sin\phi)}{\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi} = \frac{m\,d\phi(\cos m\phi + \sqrt{-1}.\sin m\phi)}{\cos m\phi + \sqrt{-1}.\sin m\phi} = m\,d\phi$$

ce qui est une équation identique.

SCHOLIE II.

§. 86. Mais on demandera, comment on auroit pu parvenir à la transformation de la formule $(a + b\sqrt{-1})^m$ à la forme $M + N\sqrt{-1}$, si l'on n'avoit pas sçu la propriété mentionnée des angles multiples, qui paroit d'abord tout à fait étrangére à ce dessein. Pour cet effet je joindrai ici une autre solution du probleme, sans emploier cette propriété; & la methode dont je me servirai, conduira ausi à la solution des

des problemes ſuivans. Comme il s'agit donc de convertir la forme $(a+b\sqrt{-1})^m$ en celle-cy $x+y\sqrt{-1}$, je poſe

$$(a+b\sqrt{-1})^m = x+y\sqrt{-1}.$$

& prenant les logarithmes on aura :

$$ml(a+b\sqrt{-1}) = l(x+y\sqrt{-1})$$

maintenant regardant $a, b, x, y,$ comme variables, je prend les differentiels :

$$\frac{mda+mdb\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}$$

qui ſe réduiſent à cette équation :

$$\frac{mada-mbda\sqrt{-1}+madb\sqrt{-1}+mbdb}{aa+bb} = \frac{xdx+xdy\sqrt{-1}-ydx\sqrt{-1}+ydy}{xx+yy}$$

où il faut que les membres réels & imaginaires ſoient ſéparément égaux entr'eux, puisqu'il eſt impoſſible d'égaler une quantité réelle à une imaginaire. De là nous tirerons deux équations :

$$\frac{mada+mbdb}{aa+bb} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy}$$

$$\& \quad \frac{m(adb-bda)}{aa+bb} = \frac{xdy-ydx}{xx+yy}$$

L'integrale de la prémiere eſt $ml\sqrt{(aa+bb)} = l\sqrt{(xx+yy)}+lC$. Soit donc $\sqrt{(aa+bb)} = c$, & il ſera $c^m = C\sqrt{(xx+yy)}$. Pour déterminer cette conſtante C, on n'a qu'à remarquer, que ſi $b=0$ & $a=1$, il faut qu'il y ait $y=0$ & $x=1$, d'où nous voyons, qu'il doit être $C=1$. Donc poſant $\sqrt{(aa+bb)}=c$, nous aurons $\sqrt{(xx+yy)}=c^m$. Enſuite l'intégrale de l'autre équation eſt $m\,\text{A tang}\,\frac{b}{a} = \text{A tang}\,\frac{y}{x}+C$; où l'on voit que la conſtante C doit être $=0$, puisque ſi $b=0$, il faut qu'il ſoit auſſi $y=0$. Par conſéquent

quent nous aurons: $m\,\mathrm{A\,tang}\,\frac{b}{a} = \mathrm{A\,tang}\,\frac{y}{x}$. Soit ϕ l'angle dont la tangente $= \frac{b}{a}$, ou bien soit $\sin\phi = \frac{b}{c}$ & $\mathrm{cos}\,\phi = \frac{a}{c}$, & ayant $m\phi = \mathrm{A\,tang}\,\frac{y}{x}$, il sera $\frac{y}{x} = \mathrm{tang}\,m\phi$, ou $\frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}} = \sin m\phi$ & $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = \mathrm{cos}\,m\phi$. Donc puisque $\sqrt{(xx+yy)} = c^m$, nous aurons pour la solution du probleme:

$$x = c^m \,\mathrm{cos}\, m\phi \quad \& \quad y = c^m \sin m\phi$$

prenant $c = \sqrt{(aa+bb)}$, & l'angle ϕ étant tel, qu'il soit $\sin\phi = \frac{b}{c}$ & $\mathrm{cos}\,\phi = \frac{a}{c}$: d'où l'on voit que l'angle ϕ a une infinité de valeurs, comme j'ai déjà remarqué, qui sont ϕ; $\pm 2\pi + \phi$; $\pm 4\pi + \phi$; $\pm 6\pi + \phi$; &c.

Probleme II.

§. 87. *Une quantité réelle positive étant élevée à une puissance dont l'exposant est une quantité imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puissance.*

SOLUTION.

Soit a la quantité réelle positive, & $m+n\sqrt{-1}$ l'exposant de la puissance, de sorte qu'il faut chercher la valeur imaginaire de $a^{m+n\sqrt{-1}}$. Soit donc

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

& il sera $(m+n\sqrt{-1})\,la = l(x+y\sqrt{-1})$, dont prenant les differentiels en posant a, x, & y variables, nous aurons

$$\frac{mda}{a} + \frac{nda\sqrt{-1}}{a} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} + \frac{xdy-ydx}{xx+yy}\sqrt{-1}.$$

Egalant

Egalant donc féparément enfemble les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux équations:

$$\frac{m\,da}{a} = \frac{x\,dx + y\,dy}{xx+yy} \;\&\; \frac{n\,da}{a} = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx+yy}$$

dont les integrales prifes, comme il faut, feront:

$$\sqrt{(xx+yy)} = a^m \;\&\; \text{A tang}\,\frac{y}{x} = n\,la, \text{ ou } \frac{y}{x} = \text{tang. } n\,la$$

où la marque le logarithme hyperbolique de la quantité réelle pofitive a, lequel aura par confequent auffi une valeur réelle. Prenant donc dans un cercle, dont le rayon $= 1$, un arc $= n\,l\,a$, à caufe de $\sqrt{(xx+yy)} = a^m$, nous obtiendrons:

$$x = a^m \cos n\,la \quad \& \quad y = a^m \sin n\,la$$

& ces valeurs étant pofées pour x & y, on aura:

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}. \quad \text{C.Q.F.T.}$$

COROLL. 1.

§. 88. La quantité imaginaire $a^{m+n\sqrt{-1}}$ fera donc auffi comprife dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$, puisque nous venons de trouver:

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m \cos n\,l\,a + a^m\sqrt{-1}.\sin n\,l\,a$$

lorsque a eft une quantité réelle pofitive; car fi a étoit une quantité negative quoique réelle, fon logarithme feroit imaginaire, & partant auffi $\cos n\,l\,a$ & $\sin n\,l\,a$ imaginaires.

COROLL. 2.

§. 89. Puisque $a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m.\ a^{n\sqrt{-1}}$, il fera:

$$a^{n\sqrt{-1}} = \cos n\,la + \sqrt{-1}.\sin n\,la.$$

& prenant n negatif, il fera auffi

$$a^{-n\sqrt{-1}} = \cos n\,la - \sqrt{-1}.\sin n\,la$$

COROLL.

COROLL. 3.

§. 90. De là il s'enfuit, que les formules fuivantes font réelles

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} + a^{-n\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof. } n\,l\,a \ \&$$

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} - a^{-n\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{fin. } n\,l\,a$$

Or fi $a = 1$, il fera tant $1^{n\sqrt{-1}} = 1$, que $1^{-n\sqrt{-1}} = 1$, à caufe de $l\,1 = 0$.

COROLL. 4.

§. 91. Donc fi l'on met $n = 1$ & $a = 2$, il fera:

$\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \text{cof } l\,2$ & $\frac{2^{\sqrt{-1}} - 2^{-\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{fin } l\,2$. Or puisqu'il y a $l\,2 = 0,693147180559$9, on en tirera cof. $l\,2 = 0,7692389013540 = \frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$. Mais l'arc même dont le cofinus $= l\,2$ fe trouve $39^{\circ}, 42^{I}, 51^{II}, 52^{III}, 9^{IV}$.

SCHOLIE.

§. 92. Le cas, où a eft un nombre negatif, qui n'eft pas compris dans cette folution, quoique a foit une quantité réelle, fe réfoudra par le probleme fuivant, où je prendrai pour la quantité, qui doit être élevée à un expofant imaginaire, une quantité imaginaire quelconque de la forme $a + b\sqrt{-1}$, qui comprend fous elle, en pofant $b = 0$, toutes les quantités réelles tant negatives que pofitives.

Probleme III.

§. 93. *Une quantité imaginaire étant elevée à une puiffance dont l'expofant eft auffi imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puiffance.*

SOLU-

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, & $m+n\sqrt{-1}$ l'expoſant de la puiſſance, de ſorte qu'il faille trouver la valeur de cette formule $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$. Poſons donc pour cet effet:

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x+y\sqrt{-1}$$

& prenant les logarithmes on aura:

$$(m+n\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1}) = l(x+y\sqrt{-1})$$

Paſſons aux differentiels, & puiſque, comme nous avons déjà vu,

$$d.\,l(x+y\sqrt{-1}) = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} + \frac{(xdy-ydx)}{xx+yy}\sqrt{-1}$$

nous aurons:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m(ada+bdb)}{aa+bb} + \dfrac{n(ada+bdb)\sqrt{-1}}{aa+bb} \\ + \dfrac{m(adb-bda)\sqrt{-1}}{aa+bb} - \dfrac{n(adb-bda)}{aa+bb} \end{array}\right\} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} + \frac{(xdy-ydx)\sqrt{-1}}{xx+yy}$$

Egalant maintenant ſéparément les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux égalités:

$$\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb} - \frac{n(adb-bda)}{aa+bb} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy}$$

$$\frac{m(adb-bda)}{aa+bb} + \frac{n(ada+bdb)}{aa+bb} = \frac{xdy-ydx}{xx+yy}$$

Pour en prendre les integrales ſoit:

$$\sqrt{(aa+bb)} = c \quad \& \quad \text{A tang}\,\frac{b}{a} = \Phi;$$

ou bien $\sin\Phi = \frac{b}{c}$ & $\cos\Phi = \frac{a}{c}$, d'où l'on peut toujours trouver l'angle Φ; or je ſuppoſe ici, que c eſt une quantité poſitive $= \sqrt{(aa+bb)}$. Cela remarqué, nos integrales ſeront:

$$m\,lc - n\phi = l\sqrt{(xx + yy)}$$

$$m\phi + n\,lc = \text{A tang.}\ \frac{y}{x}.$$

De là il s'ensuit, qu'il sera $\sqrt{(xx+yy)} = c^m e^{-n\phi}$ mettant e pour le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Ainsi pour trouver les valeurs de x & y, de cette équation :

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

ayant posé $c = \sqrt{(aa + bb)}$, & pris l'angle ϕ tel, qu'il soit $\cos\phi = \frac{a}{c}$ & $\sin\phi = \frac{b}{c}$, on aura:

$$x = c^m e^{-n\phi} \cos(m\phi + n\,lc)$$

$$y = c^m e^{-n\phi} \sin(m\phi + n\,lc)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 94. Si $b = 0$ & a une quantité positive, on aura $c = a$, & l'angle $\phi = 0$, ou $\pm 2\pi$, ou $\pm 4\pi$, ou en général $\phi = 2\lambda\pi$, prenant λ pour un nombre entier quelconque; donc il sera:

$$a^{m+n\sqrt{-1}} = a^m e^{-2\lambda n\pi}\left(\cos(2\lambda m\pi + n\,la) + \sqrt{-1}.\sin(2\lambda m\pi + n\,la)\right)$$

qui convient avec la forme précedente, si $\lambda = 0$; de sorte que cette transformation est plus générale.

COROLL. II.

§. 95. Si $b = 0$, & a une quantité negative $-a$, il sera encore $c = +a$, & à cause de $\cos\phi = \frac{-a}{c} = -1$, l'angle ϕ sera $\pm\pi$ ou $\pm 3\pi$ ou $\pm 5\pi$ &c. ou en général $\phi = (2\lambda - 1)\pi$, prenant

pour

pour λ un nombre quelconque entier, ou positif, ou negatif. Il sera donc

$$(-a)^{m+n\sqrt{-1}} =$$

$$a^m e^{-(2\lambda-1)n\pi}\left(\cos\left((2\lambda-1)m\pi+nla\right)+\sqrt{-1}.\sin\left((2\lambda-1)m\pi+nla\right)\right)$$

COROLL. III.

§. 96. En général donc, quelques quantités que soient a & b, donnant à c la valeur positive de $\sqrt{(aa+bb)}$, & prenant pour Φ un tel angle que $\sin\Phi = \frac{b}{c}$ & $\cos\Phi = \frac{a}{c}$, puisque pour Φ on peut également prendre en général l'angle $2\lambda\pi+\Phi$, où λ marque un nombre entier quelconque affirmatif ou negatif, on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} =$$

$$c^m e^{-2\lambda n\pi-n\Phi}\left(\begin{array}{l}+\cos(2\lambda m\pi+m\Phi+nlc)\\+\sqrt{-1}.\sin(2\lambda m\pi+m\Phi+nlc)\end{array}\right)$$

d'où l'on trouvera toutes les valeurs possibles, que cette formule $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ renferme, en donnant à λ successivement toutes les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ &c. où il suffit de prendre pour c^m la seule valeur réelle & positive, qui y est renfermée.

COROLL. IV.

§. 97. Si $a=0$; $m=0$, & $b=1$, il sera $c=1$ & $\Phi=\frac{1}{2}\pi$, d'où l'on tirera cette transformation:

$$(\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi-\frac{1}{2}n\pi}$$

ou bien $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi-\frac{1}{2}\pi}$, qui est d'autant plus remarquable, qu'elle est réelle, & qu'elle renferme même une infinité de valeurs réelles differentes. Car posant $\lambda=0$, on aura en nombres

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0,2078795763507.$$

COROLL.

COROLL. V.

§. 98. Si l'on pose $a = \cos\phi$ & $b = \sin\phi$, prenant $c = 1$, de sorte que $lc = 0$; & on aura cette transformation remarquable:

$$(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)^{m+n\sqrt{-1}} =$$

$$e^{-2\lambda n\pi - n\phi}\left(\cos m(2\lambda\pi + \phi) + \sqrt{-1}.\sin m(2\lambda\pi + \phi)\right)$$

& si $m = 0$, cette formule sera réelle

$$(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)^{n\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda n\pi - n\phi}.$$

SCHOLIE.

§. 99. Nous voyons donc par là, que toutes les quantités imaginaires, qui tirent leur origine non seulement des opérations algebriques, mais aussi celles qui naissent de l'élevation à des exposans quelconques, & même imaginaires, sont toujours réductibles à la forme générale $M + N\sqrt{-1}$. Et on comprend de là aussi, que si les exposans étoient eux-mêmes de telles puissances à exposans imaginaires, la valeur de toute la formule seroit néantmoins comprise dans la forme $M + N\sqrt{-1}$. Car il est clair, si α, β, γ, marquent des quantités imaginaires de la forme $M + N\sqrt{-1}$, la quantité derivée α^{β^γ} y seroit aussi toujours comprise, puisque l'exposant β^γ est réductible à cette forme.

Probleme IV.

§. 100. *Un nombre imaginaire quelconque étant proposé, trouver son logarithme hyperbolique.*

SOLUTION.

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire, dont il faut chercher le logarithme, qui soit $= x + y\sqrt{-1}$; de sorte qu'il y ait:

$$l(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$$

Prenant

Prenant les differentiels on aura:

$$\frac{ada+bdb}{aa+bb}+\frac{(adb-bda)\sqrt{-1}}{aa+bb}=dx+dy\sqrt{-1}$$

Soit encore $\sqrt{(aa+bb)}=c$, & l'angle ϕ tel, qu'il soit $\operatorname{cof}\phi=\frac{a}{c}$ & $\operatorname{fin}\phi=\frac{b}{c}$; & par l'integration on trouvera: $x=l\sqrt{(aa+bb)}=lc$ & $y=\text{A tang}\frac{b}{a}=\phi$. Donc nous aurons:

$$l(a+b\sqrt{-1})=l\sqrt{(aa+bb)}+\sqrt{-1}.\text{A cof}\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$$

ou $l(a+b\sqrt{-1})=l\sqrt{(aa+bb)}+\sqrt{-1}.\text{A fin.}\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 101. Puisqu'il y a une infinité d'angles, auxquels répond le même finus $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & cofinus $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, chaque nombre tant réel qu'imaginaire a une infinité de logarithmes, dont tous font imaginaires à l'exception d'un feul lorsque $b=0$, & a un nombre pofitif.

COROLL. II.

§. 102. Si nous pofons $\sqrt{(aa+bb)}=c$, & l'angle trouvé $=\phi$, à caufe de $a=c\operatorname{cof}\phi$ & $b=c\operatorname{fin}\phi$, il fera $lc(\operatorname{cof}\phi+\sqrt{-1}.\operatorname{fin}\phi)=lc+\phi\sqrt{-1}$; où au lieu de ϕ il eft permis de mettre $\pm 2\pi+\phi$; $\pm 4\pi+\phi$; $\pm 6\pi+\phi$ &c. le charactere π marquant la fomme de deux angles droits. On aura donc $l(\operatorname{cof}\phi+\sqrt{-1}.\operatorname{fin}\phi)=\phi\sqrt{-1}$.

Probleme. V.

§. 103. *Un logarithme imaginaire étant donné, trouver le nombre qui lui convient.*

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ le logarithme imaginaire proposé, & $x+y\sqrt{-1}$ le nombre qui lui convient, de sorte que

$$l(x+y\sqrt{-1}) = a+b\sqrt{-1}$$

Comparant cette équation avec celle, que nous venons de déduire dans l'article précedent:

$$lc(\cos\Phi+\sqrt{-1}.\sin\Phi) = lc+\Phi\sqrt{-1}$$

nous aurons $\Phi = b$, & $lc = a$, donc $c = e^a$, supposant $le = 1$. D'où nous tirerons $x = e^a \cos b$ & $y = e^a \sin b$. Par conséquent le nombre, qui répond au logarithme $a+b\sqrt{-1}$, sera $= e^a(\cos b+\sqrt{-1}.\sin b)$.
C. Q. F. Tr.

COROLL. I.

§. 104. Toutes les fois donc que b est ou zero, ou égale à $+\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, &c. ou bien en général $b = \pm\lambda\pi$, le nombre qui répond au logarithme $a+b\sqrt{-1}$ sera réel & $= \pm e^a$. Il sera positif, si λ est un nombre pair, & negatif, si λ est impair.

COROLL. II.

§. 105. On voit aussi, qu'il n'y a qu'un seul nombre, qui convienne à un logarithme proposé; & que toutes les fois que le logarithme est réel, le nombre sera aussi réel. Mais qu'il y a aussi des cas, où quoique le logarithme soit imaginaire, le nombre est pourtant réel. Mais ayant déjà suffisamment exposé cette matiere ailleurs, je passe aux quantités imaginaires, qui renferment des angles, ou leurs sinus, cosinus, & tangentes.

Probleme. VI.

§. 106. *Un angle, ou arc de cercle imaginaire quelconque, étant proposé, trouver son sinus & cosinus, & tangente.*

SOLU-

SOLUTION.

Soit $a+b\sqrt{-1}$ l'angle proposé, qui étant composé de deux parties, l'une réelle a, & l'autre imaginaire $b\sqrt{-1}$, nous n'avons qu'à chercher le finns & le cosinus de cet arc imaginaire. Or les series connues nous donnent:

$$\text{cos.}\, b\sqrt{-1} = 1 + \frac{bb}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \&c. = \frac{e^b + e^{-b}}{2}$$

$$\text{sin.}\, b\sqrt{-1} = b\sqrt{-1} + \frac{b^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{b^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} \&c. = \frac{e^b - e^{-b}}{2}\sqrt{-1}$$

& de là nous tirerons:

$$\text{sin}\,(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,(e^b + e^{-b})\,\text{sin}\,a + \frac{\sqrt{-1}}{2}\,(e^b - e^{-b})\,\text{cos}\,a$$

$$\text{cos}\,(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,(e^b + e^{-b})\,\text{cos}\,a - \frac{\sqrt{-1}}{2}\,(e^b - e^{-b})\,\text{sin}\,a:$$

donc la tangente sera:

$$\text{tang}\,(a+b\sqrt{-1}) = \frac{(e^b + e^{-b})\,\text{tang}\,a + (e^b - e^{-b})\sqrt{-1}}{(e^b + e^{-b}) - (e^b - e^{-b})\,\text{tang}\,a.\sqrt{-1}} \text{ ou bien}$$

$$\text{tang}\,(a+b\sqrt{-1}) = \frac{(e^{2b} + 1)\,\text{tang}\,a + (e^{2b} - 1)\sqrt{-1}}{e^{2b} + 1 - (e^{2b} - 1)\,\text{tang}\,a.\sqrt{-1}}$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 107. Puisque dans l'expression de la tangente, tant le numerateur que le denominateur sont imaginaires, si l'on en délivre le denominateur, on aura:

$$\text{tang}\,(a + b\sqrt{-1}) = \frac{2e^{2b}\,\text{sin}\,2a + (e^{4b} - 1)\sqrt{-1}}{e^{4b} + 2e^{2b}\,\text{cos}\,2a + 1}$$

COROLL. II.

§. 108. Le ſinus de l'angle $a+b\sqrt{-1}$ devient réel non ſeulement dans le cas $b=0$, où l'angle meme eſt réél, mais auſſi dans les cas, où coſ $a=0$, ce qui arrive, lorsque poſant ϱ pour la marque d'un angle droit, il eſt $a=(2\lambda-1)\varrho$, où λ ſignifie un nombre entier où negatif. Car alors il ſera:

$$\sin\left((2\lambda-1)\varrho+b\sqrt{-1}\right)=\pm\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})$$

où le ſigne + a lieu, ſi λ eſt un nombre impair, & le ſigne −, ſi λ eſt un nombre pair.

COROLL. III.

§. 109. De méme le coſinus de l'angle $a+b\sqrt{-1}$ ſera réel non ſeulement lorsque $b=0$, mais auſſi lorsque ſin $a=0$, ce qui arrive ſi $a=2\lambda\varrho$, & alors on aura coſ $(2\lambda\varrho+b\sqrt{-1})=\pm\frac{1}{2}(e^b+e^{-b})$, où le ſigne ſuperieur + a lieu, ſi λ eſt un nombre pair, & l'inferieur −, ſi λ eſt un nombre impair.

COROLL. IV.

§. 110. Pour la tangente de l'angle $a+b\sqrt{-1}$, elle ne ſauroit jamais devenir réelle, à moins qu'il ne fut $b=0$, ou l'angle même réel.

COROLL. V.

§. 111. Les formules trouvées fourniſſent encore, en donnant à $\sqrt{-1}$ ſes deux ſignes + & −, qui lui conviennent également, les formules ſuivantes, qu'il ſera à propos de remarquer:

$$\sin(a+b\sqrt{-1})+\sin(a-b\sqrt{-1})=(e^b+e^{-b})\sin a$$
$$\sin(a+b\sqrt{-1})-\sin(a-b\sqrt{-1})=(e^b-e^{-b})\sqrt{-1}.\cos a$$
$$\cos(a+b\sqrt{-1})+\cos(a-b\sqrt{-1})=(e^b+e^{-b})\cos a$$
$$\cos(a+b\sqrt{-1})-\cos(a-b\sqrt{-1})=(e^b-e^{-b})\sqrt{-1}.\sin a.$$

Proble-

Probleme VII.

§. 112. *Le sinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le sinus total, de sorte que l'angle soit imaginaire, trouver la valeur de cet angle.*

SOLUTION.

Il y a ici deux cas, selon que ce sinus donné est positif ou negatif :

I. Soit donc premierement le sinus positif $= p$ & $p > 1$ prenant toujours l'unité pour le sinus total, & soit l'angle imaginaire qui répond à ce sinus $= a + b\sqrt{-1}$, & pour que le sinus soit réel, il faut qu'il soit $a = (2\lambda - 1)\varrho$, prenant ϱ pour la marque d'un angle droit, & puisque selon le §. 108.

$$\sin\left((2\lambda-1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = \pm \tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) = p$$

il faut qu'il soit λ un nombre impair. Soit donc $\lambda = 2\mu + 1$, & nous aurons :

$$\sin\left((4\mu+1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) = p$$

cette équation étant toujours possible, on en tirera

$$e^{b} = p \pm \sqrt{(pp-1)} \quad \& \quad b = l\left(p \pm \sqrt{(pp-1)}\right)$$

donc l'angle cherché qui répond au sinus p sera

$$(4\mu+1)\varrho + \sqrt{-1}.\ l\left(p \pm \sqrt{(pp-1)}\right)$$

II. Soit le sinus proposé negatif $= -p$ & $p > 1$, & il faut que λ soit un nombre pair. Soit donc $\lambda = 2\mu$, & il sera :

$$\sin\left((4\mu-1)\varrho + b\sqrt{-1}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) = -p$$

D'où l'on tire comme dans le cas précedent

$$e^{b} = p \pm \sqrt{(pp-1)} \quad \& \quad b = l\left(p + \sqrt{(pp-1)}\right)$$

 Donc

Donc l'angle qui répond au finus negatif $-p$ fera :

$$(4\mu-1)\varrho + \sqrt{-1}.\ \ l(p \pm \sqrt{(pp-1)}).\quad \text{C. Q. F. T.}$$

Probleme VIII.

§. 113. *Le cofinus d'un angle étant réel, mais plus grand que le finus total $=1$, trouver l'angle imaginaire qui répond à ce cofinus.*

SOLUTION.

Soit $p > 1$, & que le cofinus propofé foit $= + p$. L'angle répondant foit $= a + b\sqrt{-1}$ & par §. 109 il eft clair qu'il doit être $a = 2\lambda\varrho$, pour qu'il foit

$$\text{cof}\ (2\lambda\varrho + b\sqrt{-1}) \ = \ \pm \tfrac{1}{2}\ (e^b + e^{-b}) = p$$

donc il faut qu'il foit λ un nombre pair. Soit donc $\lambda = 2\mu$ & nous aurons :

$$\text{cof}\ (4\mu\varrho + b\sqrt{-1}) \ = \ \tfrac{1}{2}\ (e^b + e^{-b}) = p:$$

d'où l'on tire $e^b = p + \sqrt{(pp-1)}$ & $b = l(p \pm \sqrt{(pp-1)})$ & partant au cofinus pofitif p répond l'angle

$$4\mu\varrho + \sqrt{-1}.\ \ l\ (p \pm \sqrt{(pp-1)}).$$

Si le cofinus donné eft negatif $= -p$, de forte que $p > 1$, il faut prendre pour λ un nombre impair, foit donc $\lambda = 2\mu + 1$, & l'angle ou l'arc, qui répond au cofinus negatif $-p$, fera

$$(4\mu+2)\varrho + \sqrt{-1}.\ l(p \pm \sqrt{(pp-1)}).\quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

§. 114. Il eft indifferent de prendre $p + \sqrt{(pp-1)}$ ou $p - \sqrt{(pp-1)}$, l'un & l'autre étant une quantité pofitive. On n'a qu'à remarquer que $l(p + \sqrt{(pp-1)}) = -l(p - \sqrt{(pp-1)})$, de forte que cette ambiguité réjaillit fur celle, qui eft effentielle à $\sqrt{-1}$.

Proble-

Probleme IX.

§. 114. *Le sinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur de l'angle ou l'arc imaginaire, qui lui répond.*

SOLUTION.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ le sinus imaginaire proposé, & que l'angle cherché soit $= a + b\sqrt{-1}$, de sorte qu'il doit être

$$\sin(a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}.$$

Maintenant comparons cette forme $p + q\sqrt{-1}$ avec celle qui a été trouvée dans le probleme 6me, & on aura

$$p = \tfrac{1}{2}(e^b + e^{-b}) \sin a \quad \& \quad q = \tfrac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \cos a$$

& de là on tirera :

$$p \cos a + q \sin a = e^b \sin a \cos a \quad \text{ou bien}$$

$$e^b = \frac{p}{\sin a} + \frac{q}{\cos a} \quad \& \quad e^{-b} = \frac{p}{\sin a} - \frac{q}{\cos a}$$

Or puisque $e^b e^{-b} = 1$ nous obtiendrons :

$$pp \cos a^2 - qq \sin a^2 = \sin a^2 \cos a^2 \quad \text{ou bien}$$

$pp - (pp + qq)\sin a^2 = \sin a^2 - \sin a^4$, d'où nous tirons

$\sin a^2 = \frac{1}{2}(1 + pp + qq) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp)}$ &

$\sin a = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + 2p + pp + qq)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - 2p + pp + qq)}$ &

$\cos a^2 = \frac{1}{2}(1 - pp - qq) \mp \sqrt{(\frac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp)}$.

Mais puisque $\cos 2a = 2\cos a^2 - 1$, il sera

$$\cos 2a = -pp - qq + \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)}$$

cette expression étant toujours réelle & moindre que l'unité, l'angle $2a$ & partant aussi a sera réel, & on en trouvera $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$

& $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$. Or ces quantités étant trouvées avec

l'angle a, on aura $b = l\left(\frac{p}{\sin a} + \frac{q}{\cos a}\right)$, & l'angle qui répond au finus $p + q\sqrt{-1}$ fera $a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

§. 115. Si le finus propofé eft fimplement imaginaire ou $= q\sqrt{-1}$ deforteque $p = o$, & il eft clair qu'il doit être fin $a = o$, & partant $a = 2\lambda\varrho$; où ϱ marque l'angle droit & λ un nombre entier quelconque : donc il fera $q = \pm\frac{1}{2}(e^b - e^{-b})$ felon que λ eft un nombre pair ou impair. Il fera donc $e^b = \pm q \pm \sqrt{(qq + 1)}$, & partant on pourra toujours rendre cette quantité pofitive, d'où l'on aura

$b = l(\sqrt{(qq + 1)} \pm q)$, où le figne $+$ a lieu fi λ eft un nombre pair, & le $-$ fi λ eft impair. Ainfi l'arc qui répond au finus $q\sqrt{-1}$ fera

$$\text{ou } 4\mu\varrho + \sqrt{-1}.\ l(\sqrt{(qq + 1)} + q)$$
$$\text{ou } (4\mu + 2)\varrho + \sqrt{-1}.\ l(\sqrt{(qq + 1)} - q).$$

Probleme X.

§. 116. *Le cofinus d'un angle étant imaginaire, trouver la valeur imaginaire de l'arc ou l'angle qui lui répond.*

SOLUTION.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ le cofinus imaginaire propofé, & $a + b\sqrt{-1}$ l'arc cherché qui lui répond : de forte que

$$\cos(a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}.$$

Or fi nous rapportons cette égalité avec l'article 106 nous aurons:

$p = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b})\cos a$ & $q = -\frac{1}{2}(e^b - e^{-b})\sin a$

d'où nous obtiendrons :

$$e^b = \frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a} \quad \& \quad e^{-b} = \frac{p}{\cos a} + \frac{q}{\sin a}$$

&

& $\cos a^2 = \frac{1}{2}(1 + pp + qq) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(1 + pp + qq)^2 - pp)}$
donc $\cos 2a = pp + qq - \sqrt{(1 - 2pp + 2qq + (pp + qq)^2)}$
qui est aussi toujours réelle & moindre que le sinus total, de la on aura $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$ & $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$, & ayant déterminé l'angle a même, à cause de $b = l\left(\frac{p}{\cos a} - \frac{q}{\sin a}\right)$, l'angle ou l'arc qui répond au cosinus imaginaire $p + q\sqrt{-1}$ sera $= a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. Tr.

COROLLAIRE.

§. 117. Si $p = o$, de sorte que le cosinus proposé est $= q\sqrt{-1}$, on aura $\cos a = o$, & partant $a = (2\lambda - 1)\varrho$, d'où l'on tire $q = -\frac{1}{2}(e^b - e^{-b}) . \pm 1$, où le signe superieur vaut, si λ est un nombre impair, & l'inferieur si pair. On aura donc
$e^{2b} = \mp 2e^b q + 1$, & $e^b = \mp q + \sqrt{(qq + 1)}$, & $b = l(\sqrt{(qq+1)} \mp q)$
& l'arc qui repond au cosinus $q\sqrt{-1}$ sera
ou $(4\mu + 1)\varrho + \sqrt{-1} . l(\sqrt{(1 + qq)} - q)$
ou $(4\mu + 3)\varrho + \sqrt{-1} . l(\sqrt{(1 + qq)} + q)$

SCHOLIE.

§. 118. Ayant trouvé la valeur de $\cos 2a$, si l'on en cherche les valeurs $\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$ & $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$, on les peut prendre, ou affirmatives, ou negatives. Pour faire le choix, il faut regarder aux quantités p & q, si elles sont positives ou negatives, & donner ensuite aux $\sin a$ & $\cos a$ les signes, qui rendent les valeurs de e^b & de e^{-b} positives, tant dans ce probleme que dans le precedent; or dans chaque cas ce choix est aisé à faire, de sorte qu'on est toujours le maitre de trouver des valeurs réelles pour les lettres a & b.

Probleme XI.

§. 119. *Une tangente imaginaire étant donnée, trouver la valeur imaginaire de l'angle ou de l'arc, qui lui repond.*

SOLUTION.

Soit $p+q\sqrt{-1}$ la tangente imaginaire donnée, & $a+b\sqrt{-1}$ l'arc, qui convient à cette tangente, de sorte que

$$\text{tang}\,(a+b\sqrt{-1})=p+q\sqrt{-1}.$$

Or nous avons trouvé cy-dessus §. 107.

$$\text{tang}\,(a+b\sqrt{-1})=\frac{2e^{2b}\sin 2a+(e^{4b}-1)\sqrt{-1}}{e^{4b}+2e^{2b}\cos 2a+1}$$

donc il faut qu'il soit,

$$p=\frac{2e^{2b}\sin 2a}{e^{4b}+2e^{2b}\cos 2a+1}\ \&\ q=\frac{e^{4b}-1}{e^{4b}+2e^{2b}\cos+1}$$

de là nous tirons ces deux équations

$$e^{4b}p+2e^{2b}(p\cos 2a-\sin 2a)+p=0$$
$$e^{4b}(q-1)+2e^{2b}q\cos 2a+q+1=0$$

& par élimination.

$$e^{2b}=\frac{-p}{p\cos 2a+(q-1)\sin 2a}=\frac{-p\cos 2a+(q+1)\sin 2a}{p}$$

Donc nous aurons:

$$0=pp(1-\cos 2a^2)+2p\sin 2a\cos 2a+(qq-1)\sin 2a^2 \text{ ou bien}$$
$$0=pp\sin 2a+2p\cos 2a+(qq-1)\sin 2a$$

Par conséquent on aura

$$\text{tang}\,2a=\frac{2p}{1-pp-qq}\quad\&\ \text{partant}$$

$$\sin 2a=\frac{2p}{\sqrt{(4pp+(1-pp-qq)^2)}}\ \&\cos 2a=\frac{1-pp-qq}{\sqrt{(4pp+(1-pp-qq^2))}}$$

donc

donc $e^{2b} = \frac{pp + (1+q)^2}{\sqrt{(4pp + (1-pp-qq)^2)}}$

$\& \; b = \frac{1}{2} l(pp + (1+q)^2) - \frac{1}{4} l(4pp + (1-pp-qq)^2)$

Ayant donc trouvé par ces formules tant la valeur de b, que celle de l'angle $2a$ ou a, l'angle ou l'arc, qui répond à la tangente imaginaire $p + q\sqrt{-1}$ sera $= a + b\sqrt{-1}$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

§. 120. Puisque $4pp + (1-pp-qq)^2 = (pp + (q+1)^2)(pp + (q-1)^2)$ il sera :

$$e^{4b} = \frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2} \text{ \& partant } b = \frac{1}{4} l \frac{pp + (q+1)^2}{pp + (q-1)^2}.$$

Or l'angle a se détermine le plus commodément de la formule de la tangente : tang $2a = \frac{2p}{1-pp-qq}$, d'où l'on voit, que les valeurs de a & b seront toujours réelles.

COROLL. II.

§. 121. Si $p = 0$, ou qu'on veuille chercher l'angle dont la tangente $= q\sqrt{-1}$, il sera tang $2a = 0$, donc $2a = 2\lambda\varrho$, & $a = \lambda\varrho$, & $b = \frac{1}{4} l \frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$. Par conséquent à la tangente $q\sqrt{-1}$ répondent les arcs $\lambda\varrho + \frac{\sqrt{-1}}{4} l \frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}$ où $\lambda\varrho$ marque un multiple quelconque de l'angle droit.

COROLL. III.

§. 122. Ici les cas où $q + 1 = 0$, ou $q - 1 = 0$, exigent une réduction particulière, qu'il faut faire, avant que de poser $p = 0$. Soit donc $qq - 1 = 0$, ou la tangente proposée $= p \pm \sqrt{-1}$, & on aura tang

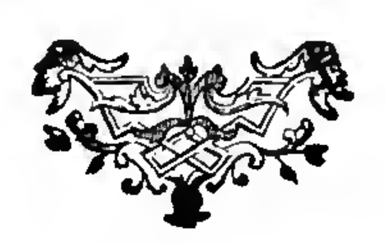
tang $2a = \frac{-2}{p}$, & $e^{4b} = \frac{pp+2\pm 2}{pp+2\mp 2}$; c'eſt à dire pour le ſigne ſuperieur $e^{4b} = \frac{pp+4}{pp}$ & pour l'inferieur $e^{4b} = \frac{pp}{pp+4}$. Maintenant ſi $p = 0$, il ſera $2a = (2\lambda + 1)\varrho$ à cauſe de tang $2a = \infty$, & $b = \pm\infty$. Donc à la tangente $\pm\sqrt{-1}$ répond l'angle $= (\lambda + \frac{1}{2})\varrho \pm \infty\sqrt{-1}$.

COROLL. IV.

§. 123. Lorsque $pp = 1 - qq$ ou $p = \sqrt{(1-qq)}$, il ſera tang $2a = \infty$ & $2a = (2\lambda + 1)\varrho$: ou $a = (\lambda + \frac{1}{2})\varrho$. Enſuite il ſera $b = \frac{1}{4}\, l\, \frac{1+q}{1-q}$. De ſorte qu'à la tangente $\sqrt{(1-qq)} \pm q\sqrt{-1}$ repond l'arc $= (\lambda + \frac{1}{2})\varrho \pm \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\, \frac{1+q}{1-q}$.

SCHOLIE.

§. 124, Puisque donc toutes ces quantités imaginaires, qui ſont formées par des opérations transcendantes ſont auſſi compriſes dans la forme générale $M + N\sqrt{-1}$, nous pourrons ſoutenir ſans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelques compliquées qu'elles puiſſent être, ſont toujours réductibles à la forme $M + N\sqrt{-1}$; ou qu'elles ſont toujours compoſées de deux membres, donc l'un eſt réel, & l'autre une quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.



RECHER-